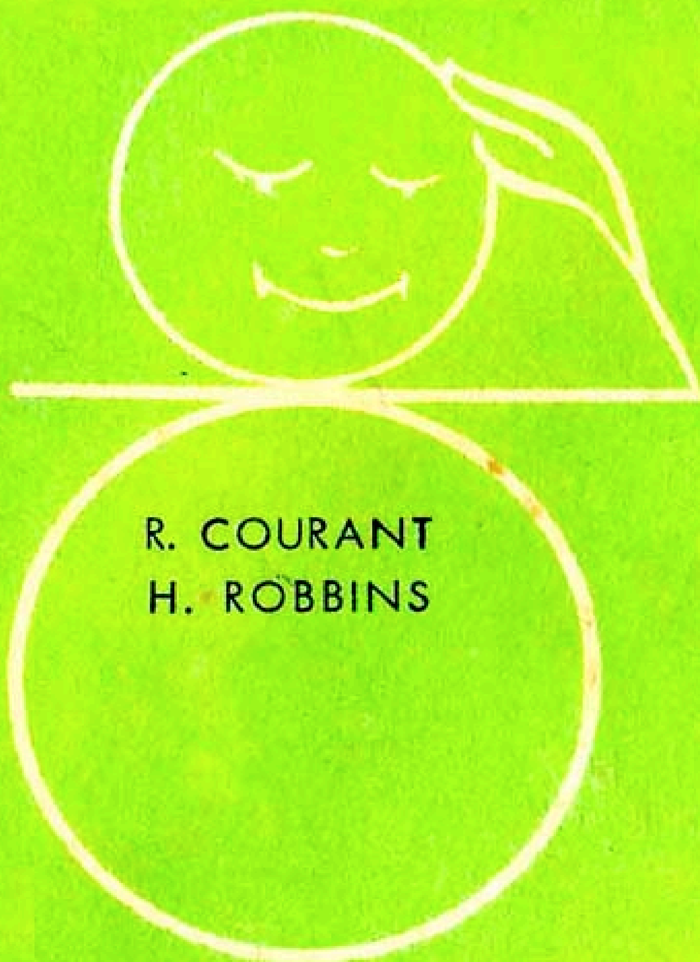
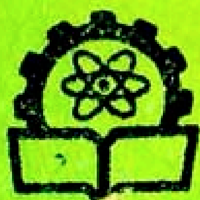


R. COURANT
H. ROBBINS

TOÁN HỌC là gì?

TẬP II



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT



THÂN TẶNG BẠN NGUYỄN THANH HIỆP

Chúc mừng Bạn là người đầu tiên
thích trang của chúng tôi

Quân

R. COURANT, H. ROBBINS

TOÁN HỌC LÀ GÌ?

(Phác thảo sơ cấp về tư tưởng và phương pháp)

Người dịch: Hàn Liên Hải

TẬP 2



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI – 1985

Nguyên bản tiếng Anh
Dịch từ bản tiếng Nga

Р. КУРАНТ, Г. РОББИНС

ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИКА?

(Элементарный очерк идей и методов)

Издательство «Просвещение», Москва, 1967.

CHƯƠNG III

CÁC PHÉP DỰNG HÌNH. ĐẠI SỐ CÁC TRƯỜNG SỐ

MỞ ĐẦU

Các bài toán dựng hình bao giờ cũng là một trong những đối tượng thích thú nhất trong các bài tập hình học. Như bạn đọc đã biết qua giáo trình nhà trường, chỉ nhờ có compa và thước kẻ ta có thể thực hiện được rất nhiều các phép dựng khác nhau: chia một đoạn thẳng hoặc một góc làm đôi, vẽ qua một điểm một đường vuông góc với đường thẳng cho trước, nội tiếp trong hình tròn cho trước một lục giác đều v.v... Trong tất cả các phép dựng đó thước kẻ chỉ được dùng để vạch đường thẳng, chứ không được dùng để đo hoặc đặt các khoảng cách. Sự hạn chế truyền thống — chỉ dùng thước kẻ và compa — có nguồn gốc từ thời xa xưa, mặc dầu trong thực tiễn, bản thân người Hy lạp cũng không do dự khi sử dụng đến các công cụ khác.

Một trong những bài toán dựng hình cổ điển và nổi tiếng nhất là bài toán *Apôlôniut* (khoảng 220 năm trước công nguyên): Cho ba đường tròn, dựng đường tròn thứ tư tiếp xúc với ba đường tròn đã cho. Nói riêng, không loại trừ trường hợp một hoặc nhiều hơn trong

số các đường tròn cho trước « suy biến » thành một điểm hoặc một đường thẳng (« hình tròn » có bán kính « không » hoặc « vô hạn »). Chẳng hạn, có thể đề cập đến việc dựng một đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng cho trước và đi qua một điểm cho trước. Nếu như trường hợp riêng này không khó khăn gì thì bài toán trong trường hợp tổng quát lại là một bài toán khá khó.

Trong tất cả các bài toán về dựng hình (nhờ compa và thước kẻ) thì bài toán dựng đa giác đều n cạnh, có lẽ đáng được chú ý nhất. Đối với một loạt giá trị của n, chẳng hạn n = 3, 4, 5, 6, thì lời giải đã được biết đến từ thời cổ xưa và đã được trình bày trong hình học nhà trường. Nhưng đối với trường hợp đa giác bảy cạnh đều (n = 7) thì người ta đã chứng minh rằng không thể dựng được. Sau đây là ba bài toán cổ điển nữa mà lời giải đã được tìm kiếm từ lâu mà vẫn không có kết quả: chia một góc bất kỳ cho trước thành ba phần bằng nhau, gấp đôi một hình lập phương cho trước (tức là dựng cạnh hình lập phương có thể tích gấp đôi thể tích hình lập phương có cạnh cho trước) và « cầu phượng » một hình tròn (tức là dựng hình vuông có diện tích bằng diện tích hình tròn cho trước). Trong những bài toán này ta qui ước không dùng các dụng cụ khác ngoài compa và thước kẻ.

Những bài toán nan giải như vậy đã dẫn tới một trong những xu hướng lý thú nhất và cơ bản nhất của tư tưởng toán học. Sau vài thế kỷ tìm kiếm vô hiệu quả, các nhà toán học đã khẳng định không thể tìm được lời giải của chúng. Tiếp theo đó, nảy ra một vấn đề mới rất quyến rũ cùng với tất cả sự khó khăn của nó: *làm thế nào để chứng minh một bài toán này hay một bài toán khác là không giải được?*

Trong lĩnh vực đại số cũng có một vấn đề tương tự như vậy liên quan với bài toán giải các phương trình bậc 5 và bậc cao hơn. Trong thế kỷ XVI người ta đã chứng minh được rằng các phương trình bậc ba và bốn cũng được giải theo một qui trình như khi giải phương trình bậc hai. Nói chung, có thể đặc trưng qui trình đó như sau: lời giải hoặc « các nghiệm » của phương trình được biểu thị bằng những biểu thức chứa các hệ số của phương trình và chứa các phép toán hữu tỉ — cộng, trừ, nhân, chia — hoặc phép khai căn bậc hai, bậc ba hoặc bậc bốn. Nói gọn hơn, các phương trình đại số bậc không quá bốn « được giải bằng căn thức ». Đã tưởng có thể mở rộng một cách tự nhiên qui trình đó cho phương trình bậc 5 và bậc cao hơn bằng cách dùng căn thức bậc tương ứng, nhưng không có một cố gắng nào đạt đến kết quả. Vào thế kỷ XVII đã có lúc cả những nhà toán học lỗi lạc cũng lầm tưởng rằng đã tìm ra lời giải. Nhưng đến đầu thế kỷ XIX nhà toán học Italia Ruffini (1765 — 1822) và nhà toán học thiên tài Na uy N. G. Abel (1802 — 1829) mới có được một tư tưởng cách mạng so với thời đó — chứng minh sự không giải được bằng căn thức các phương trình đại số tổng quát bậc n. Cần hiểu rằng, ở đây, ta không đề cập đến sự tồn tại các nghiệm của phương trình đại số bậc n; sự tồn tại các nghiệm đã được Gaux chứng minh chặt chẽ trong luận văn tiến sĩ của ông năm 1799. Như vậy sự kiện có nghiệm của các phương trình đại số là không còn nghi ngờ, đặc biệt từ sau khi đã chỉ ra được những phương pháp tính gần đúng các nghiệm với độ chính xác tùy ý. Nghiệm « bằng số » của các phương trình đại số có giá trị lớn trong các ứng dụng, đã được nghiên cứu đầy đủ. Bài toán Abel và Ruffini đã được đặt ra hoàn toàn khác: Có thể tìm nghiệm chỉ nhờ các phép

toán hữu tỉ và phép khai căn hay không? Chính sự cố gắng đạt tới câu trả lời đầy đủ và rõ ràng cho câu hỏi này đã thúc đẩy sự phát triển tuyệt diệu của đại số hiện đại và lý thuyết nhóm, bắt đầu bằng các công trình của Ruffini, Abel và L. Galoa (1811 – 1832).

Sự chứng minh tính không thực hiện được của một số phép dựng hình học là một thí dụ thể hiện cho xu hướng mà ta vừa nói đến trong đại số. Bằng cách sử dụng các khái niệm đại số, ta có thể xác minh ngay trong chương này tính không thực hiện được của phép chia ba góc, của phép dựng đa giác bảy cạnh đều, của việc gấp đôi hình lập phương bằng compa và thước kẻ (Bài toán cầu phương hình tròn thì phức tạp hơn nhiều). Để tiếp cận hơn đến vấn đề mà ta quan tâm, ta phải đi theo một khía cạnh khác, không tập trung vào khía cạnh phủ định (âm tính) của vấn đề — sự không thực hiện được những phép dựng nào đó — mà gán cho nó một tính chất dương: thế nào là đặc trưng đầy đủ cho những bài toán dựng có thể giải được? Sau khi giải đáp được câu hỏi này sẽ có thể dễ dàng xác nhận những bài toán mà ta đang xét là không nằm trong phạm trù đó. Năm 17 tuổi, Gaux đã nghiên cứu khả năng dựng « các đa giác p – cạnh » đều, trong đó p là số nguyên tố. Thời đó, chỉ mới biết cách dựng cho các trường hợp p = 3 và p = 5. Gaux đã chứng minh rằng phép dựng thực hiện được khi và chỉ khi p là số nguyên tố Fecma : $p=2^{2^n}+1$. Những số Fema đầu tiên là 3, 5, 17, 257, 65537. Phát hiện này đã gây cho Gaux ấn tượng rằng ông phải từ bỏ nghề triết học và quyết định hiến cả đời mình cho toán học và ứng dụng của nó. Sau này ông đã đặc biệt tự hào về phát minh đầu tiên đó của mình. Sau khi Gaux mất, bức tượng bằng đồng thau có bệ hình 17 cạnh đều của ông đã được dựng lên ở Gottingen. Thật khó tưởng tượng có một vinh dự nào lớn hơn!

Khi đề cập đến các phép dựng hình học, không nên quên rằng bài toán không bao gồm vấn đề vẽ các hình với một mức độ chính xác nhất định trong thực tế, mà bao gồm vấn đề có thể thực hiện hay không thực hiện được phép dựng bằng lý thuyết với điều kiện các dụng cụ của ta là tuyệt đối chính xác. Chính Gaux đã chứng minh khả năng hiện thực về nguyên tắc các phép dựng mà ông đã xem xét. Lý thuyết của ông không đề cập đến vấn đề cách thực hiện phép dựng và việc dùng các thủ thuật nào để đơn giản quy trình hoặc giảm số các thao tác dựng cần thiết. Tất cả những vấn đề đó không có ý nghĩa lý thuyết lớn lắm. Với quan điểm thực tiễn thì những phép dựng như vậy sẽ không thể cho kết quả vừa ý hơn so với kết quả đạt được bằng cách dùng một thước đo góc loại tốt. Có lẽ, phải giải thích tình trạng còn tiếp tục tồn tại những chuỗi vô tận « những người chia ba góc » và « những người cầu phương hình tròn », một mặt ở nguyên nhân không hiểu đặc trưng lý thuyết của vấn đề các phép dựng hình học, mặt khác ở sự cố tình không muốn coi trọng các sự kiện khoa học đã được xác nhận đầy đủ. Đề nghị một số người nào trong số đó hiểu được toán học sơ cấp nên nghiên cứu chương này.

Để kết luận, ta nhấn mạnh rằng, ở một mức độ nào đó thì, việc đặt vấn đề về phép dựng hình học của chúng ta là có tính chất nhân tạo. Tất nhiên, thước kẻ và compa là những dụng cụ hình học đơn giản nhất nhưng yêu cầu hạn chế ở những dụng cụ đó trong các phép dựng là không thể suy ra được từ bản chất của bản thân hình học. Nhưng các nhà toán học Hy lạp từ xa xưa đã xác nhận, một số bài toán — gấp đôi hình lập phương, chẳng hạn — có thể giải được nếu có êke vuông; có thể sáng chế mọi dụng cụ khác bên cạnh compa để vẽ elip, hypebol và những đường cong phức

tạp hơn: nhờ đó phạm vi các hình dựng được sẽ được mở rộng rất nhiều. Tuy nhiên, ta vẫn phải dựa vào những hiểu biết ở trên về sự thực hiện được các phép dựng hình học với điều kiện chỉ dùng compa và thước kẻ mà thôi.

PHẦN I

SỰ CHỨNG MINH TÍNH BẤT KHẢ (KHÔNG THỂ) VÀ ĐẠI SỐ

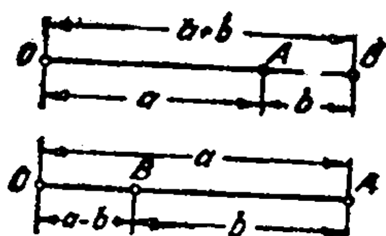
1. Phép dựng trường và rút nghiệm bậc hai.

§ 1. CÁC PHÉP DỰNG HÌNH HỌC CƠ BẢN

Trong trật tự của sự phát triển các tư tưởng tổng quát, ta bắt đầu từ việc xem xét một số ít các phép dựng cổ điển. Việc nghiên cứu sâu hơn tính có thể của các phép dựng hình học tất yếu có liên quan đến việc phiên dịch một bài toán hình học thành ngôn ngữ đại số. Có thể sơ đồ hóa một bài toán dựng hình học bất kỳ như sau: Cho trước một số đoạn thẳng nào đó a, b, c, ... phải dựng một hoặc nhiều đoạn thẳng x, y,... Ngay cả đối với những bài toán dựng mới nhìn thì có vẻ hoàn toàn khác, ta cũng có thể phát biểu lại theo sơ đồ đã nêu. Các đoạn thẳng phải tìm sẽ được thể hiện hoặc dưới hình thức các cạnh của tam giác cần dựng hoặc dưới hình thức các bán kính của các hình tròn, hoặc các tọa độ vuông góc của những điểm phải tìm nào đó. Để cho đơn giản, ta giả thử phải dựng một đoạn thẳng x nào đó. Trong trường hợp này thì một phép dựng hình học được qui về việc giải một bài toán đại số: lập hệ thức (dưới hình thức phương trình) giữa đại

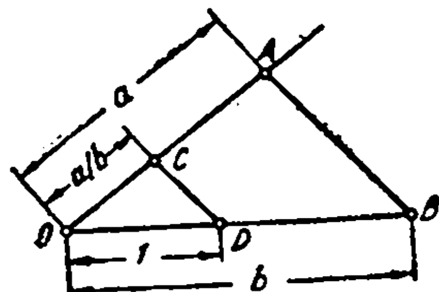
lượng x phải tìm với các đại lượng a, b, c... cho trước sau đó, bằng cách giải phương trình ta được một công thức cho đại lượng x và cuối cùng, giải thích xem có thể qui việc tính x về những qui trình đại số tương ứng với các phép dựng thực hiện bằng thước kẻ và compa hay không. Như vậy, các nguyên lý của hình học giải tích sẽ là cơ sở của toàn bộ lý thuyết đang xét — sự đặc trưng số lượng của các sự vật hình học trên cơ sở đưa continum số thực vào.

Trước hết, ta lưu ý rằng các phép toán đại số đơn giản nhất sẽ tương ứng với các phép dựng hình sơ cấp. Nếu cho trước hai đoạn thẳng có độ dài a và b (phép đo được tiến hành bằng một đoạn thẳng « đơn vị ») thì rất dễ dựng các đoạn thẳng a + b, a — b, r . a (r là số hữu tỉ) $\frac{a}{b}$ và ab.



H. 27. Phép dựng a+b và a − b

Muốn dựng a + b (H. 27), ta vẽ một đường thẳng và trên đó đặt các đoạn OA = a và AB = b bằng compa. Khi đó OB = a + b. Trường hợp a — b thì đặt OA = a và AB = b nhưng đặt b về hướng đối với hướng đặt a. Khi đó OB = a — b. Muốn dựng 3a ta đặt a + a + a, sẽ làm tương tự như vậy, nếu phải dựng pa, trong đó p là số nguyên. Dựng $\frac{a}{3}$ bằng cách sau (H. 28): Trên đường thẳng bất kỳ đặt OA = a, sau đó vẽ một đường thẳng khác đi qua O Trên đường thẳng này đặt một đoạn bất kỳ OC = c và dựng OD = 3c.

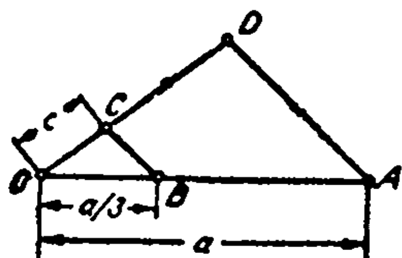


H. 28. Phép dựng $\frac{a}{b}$

Nối A với D và vẽ qua C một

đường thẳng song song với AD, đường thẳng này cắt OA ở điểm B. Các tam giác OBC và OAD đồng dạng, nghĩa là $\frac{OB}{a} = \frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD} = \frac{1}{3}$ và $OB = \frac{a}{3}$.

Tổng quát hơn, có thể dựng a/q (q nguyên) bằng cách như vậy. Thực hiện thao tác đó trên đoạn thẳng p.a, ta dựng được r.a (trong đó r = p/q là số hữu tỉ tùy ý).

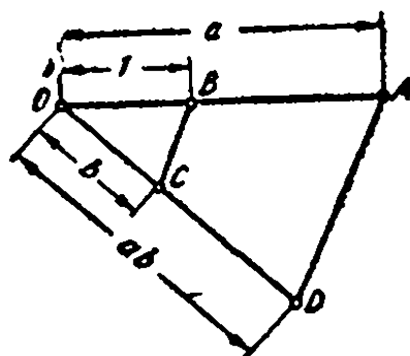


H. 29. Phép dựng a/3

Muốn dựng a/b (H. 29) ta đặt OB = b và OA = a trên các cạnh của một góc bất kỳ đỉnh O và trên cạnh OB ta đặt đoạn OD = 1.

Qua D vẽ đường thẳng song song với AB cắt OA ở điểm C. Khi đó ta có : OC = a/b, Phép dựng ab được thể hiện trên hình 30, ở đây AD là đường thẳng đi qua A song song với BC.

Từ những điều trên suy ra *các phép toán đại số* « hữu tỉ » cộng, trừ, nhân, chia thực hiện trên các đại lượng cho trước, *có thể thực hiện nhờ các phép dựng hình học*. Xuất phát từ các đoạn thẳng cho trước đo bởi các số thực a, b, c,..., ta có thể dựng một đại lượng tùy ý biểu thị hữu tỉ qua a, b, c... bằng cách thực hiện liên tiếp các phép dựng đơn giản, tức là chỉ dựa vào bốn phép dựng cơ bản kể trên. Tập hợp tất cả các đại lượng có thể thu được từ a, b, c,... bằng cách trên tạo thành *một trường số* tức là một tập hợp số có tính chất là : mọi phép toán hữu tỉ thực hiện trên hai (hoặc nhiều hơn) phần tử của tập hợp đó lại cho một phần tử cũng

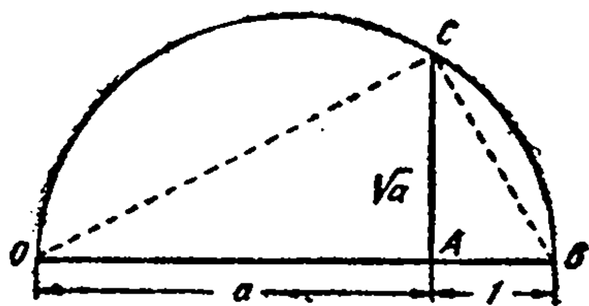


H. 30. Phép dựng ab

của tập hợp đó. Ta nhớ lại rằng tập hợp tất cả số hữu tỉ, tập hợp tất cả các số thực, tập hợp tất cả các số phức cũng lập thành những trường như vậy. Trong trường hợp ta đang xét, người ta nói rằng đó là trường *sinh ra* bởi các số a, b, c,... cho trước.

Một phép toán mới sẽ đưa chúng ta vượt khỏi giới hạn của một trường là phép khai phương. Nếu cho trước đoạn thẳng a thì đoạn thẳng $\sqrt{a}$ sẽ dựng được chỉ nhờ compa và thước kẻ. Trên một đường thẳng bất kỳ ta đặt OA = a và AB = 1 (H.31).

Sau đó vẽ đường tròn đường kính OB và từ điểm A dựng đường vuông góc với OB cắt đường tròn ở điểm C. Góc C trong tam giác OBC là góc vuông (theo một định lý đã biết trong hình học sơ cấp : góc nội tiếp trong nửa đường tròn là góc vuông). Nghĩa là $\widehat{OCA} = \widehat{ABC}$ và các tam giác vuông OAC và CAB đồng dạng.

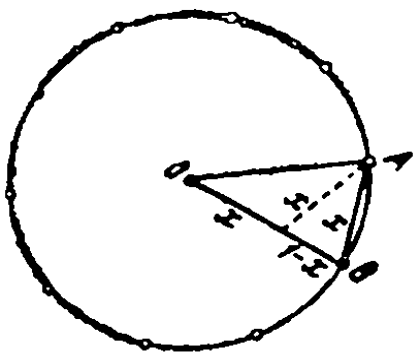


H.31. Phép dựng $\sqrt{a}$

Nếu đặt AC = x, ta có :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{1},\ x^2 = a,\ x = \sqrt{a}\,.$$

2 Đa giác đều. Bây giờ ta xét một số bài toán dựng phức tạp hơn. Ta bắt đầu bằng phép dựng *thập giác đều*. Ta giả thiết rằng hình thập giác đều nội tiếp trong hình tròn bán kính 1 (H.32) và biểu thị cạnh của nó là x. Vì góc ở tâm nhìn cạnh x là 36°, cho nên mỗi



H. 32. Thập giác đều

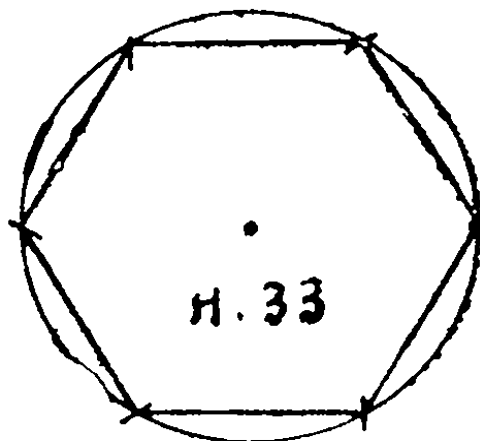
góc còn lại của tam giác lớn là 72^0. Như vậy thì đường dứt đoạn sẽ chia đôi góc A và chia tam giác OAB thành hai tam giác cân có các cạnh bên là x. Do đó bán kính đường tròn sẽ gồm hai đoạn x và 1 — x. Vì tam giác OAB là đồng dạng với tam giác nhỏ trong hai tam giác mà nó bị phân chia ra, cho nên ta có $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$. Tỉ lệ này dẫn đến phương trình bậc hai $x^2 + x - 1 = 0$, một nghiệm của nó có dạng $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ (ta không để ý đến nghiệm còn lại vì nó tương ứng với giá trị âm của x). Từ công thức thu được ta thấy có thể dựng đoạn x bằng hình học. Có đoạn x, ta dựng được thập giác đều bằng cách đặt mười lần dây cung x theo đường tròn. Từ đó, ta cũng dễ dàng dựng được ngũ giác đều bằng cách nối cách một các đỉnh của thập giác với nhau.

Đáng nhẽ dựng $\sqrt{5}$ theo phương pháp chỉ trên hình 31, ta cũng có thể dựng cạnh huyền của tam giác vuông có các cạnh 1 và 2. Sau đó bớt đi một đơn vị và chia đôi đoạn còn lại.

Tỉ số OB/AB trong bài toán vừa xét được gọi là tỷ số « vàng » vì theo ý kiến của các nhà toán học Hy lạp thì hình chữ nhật mà các cạnh có tỉ số đó là thích hợp đặc biệt về thẩm mỹ với mắt ta. Giá trị của tỉ số này gần bằng 1,62.

Trong tất cả các đa giác đều thì lục giác đều dễ dựng nhất. Vì độ dài mỗi cạnh của lục giác đều nội tiếp

trong hình tròn bằng bán kính hình tròn, cho nên việc dựng nó không có khó khăn gì nếu ta đặt theo đường tròn sáu lần đoạn thẳng bán kính.



H.33 Lục giác đều

Nếu có một đa giác đều n — cạnh thì có thể dựng được ngay đa giác đều 2n — cạnh bằng cách chia đôi cung giữa hai đỉnh kề nhau của đa giác n — cạnh. Bắt đầu từ đường kính của hình tròn (đa giác « hai cạnh » đều nội tiếp) ta dựng liên tiếp các đa giác 4, 8, 16, ..., 2^n—cạnh. Cũng vậy, bắt đầu từ lục giác, ta dựng được đa giác 12, 24, 48... cạnh, còn bắt đầu từ thập giác, ta được đa giác 20, 40, ... — cạnh.

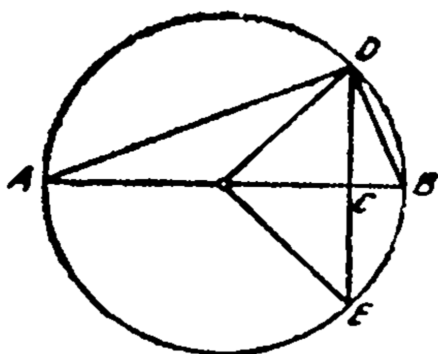
Nếu biểu thị độ dài một cạnh của đa giác n—cạnh đều nội tiếp trong hình tròn đơn vị (tức là hình tròn có bán kính 1) là s_n thì cạnh của đa giác đều 2n — cạnh là:

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

Điều này được chứng minh như sau (H.34):
$s_n = DE = 2DC$, $s_{2n} = DB$ và $AB = 2$. Diện tích tam giác vuông ABD bằng $\frac{1}{2}BD.AD$, hoặc bằng $\frac{1}{2}AB.CD$. vì $AD = \sqrt{AB^2 - CD^2}$ cho nên, nếu đặt $AB = 2$, $BD = s_{2n}$ $CD = \frac{1}{2}s_n$ và so sánh hai biểu thức diện tích với nhau, ta có:

$$s_n = s_{2n}\sqrt{4 - s_{2n}^2} \text{ hay } s_n^2 = s_{2n}^2(4 - s_{2n}^2).$$

Còn phải giải phương trình bậc hai đối với $x = s_{2n}^2$ và khi chọn nghiệm lưu ý rằng x phải nhỏ hơn 2.



H.34. Gấp đôi cạnh của đa giác đều

Từ công thức đó suy ra (vì s_4 — cạnh hình vuông bằng $\sqrt{2}$) :

$$s_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$s_{16} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$s_{32} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \text{ v.v...}$$

v.v. . .

Ta có công thức tổng quát (khi $n > 2$) :

$$s_{2^n} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}},$$

trong đó vế phải bao giờ cũng có $n-1$ căn thức. Chu vi của đa giác 2^n—cạnh nội tiếp trong hình tròn bán kính 1 bằng $2^n s_{2^n}$. Khi n tiến tới vô hạn, chu vi đó có giới hạn là độ dài đường tròn, bằng 2π theo định nghĩa:

$$2^n s_{2^n} \to 2\pi \qquad \text{khi } n \to \infty.$$

Chia cho 2 và thay m vào chỗ $n-1$ ta được công thức sau đây cho số π:

$$2^m \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{m \text{ căn thức}} \to \pi \ (\text{khi } m \to \infty)$$

Ta tóm tắt các kết quả tìm được ở đây như sau: Các cạnh của đa giác đều 2^n—cạnh, 5.2^n—cạnh và 3.2^n—cạnh nội tiếp trong hình tròn đơn vị được tính bằng các phép toán hữu tỉ — phép cộng, phép trừ, phép nhân, phép chia — và phép khai phương. Do đó có thể dựng được chúng bằng compa và thước kẻ.

3. Bài toán Apôlôniut. Một bài toán dựng khác sẽ được giải khá đơn giản nếu xét nó với quan điểm đại số — đó là bài toán nổi tiếng của Apôlôniut về dựng đường tròn tiếp xúc với ba đường tròn cho trước đã nhắc đến ở trên. Trong điều kiện của đoạn này chúng ta thấy không cần thiết phải tìm một lời giải đặc biệt thanh lịch của nó. Ta chỉ cần xác nhận một vấn đề quan trọng về mặt nguyên tắc: bài toán Apôlôniut giải được bằng compa và thước kẻ. Ta sẽ nếu vắn tắt chứng minh của nó; vấn đề về phép dựng đẹp nhất sẽ được trình bày ở sau.

Giải thử tâm của ba đường tròn cho trước lần lượt có tọa độ (x_1, y_1), (x_2, y_2) và (x_3, y_3), còn các bán kính bằng r_1, r_2 và r_3.. Biểu thị tọa độ tâm đường tròn phải tìm là (x, y), bán kính là r. Dễ dàng viết ra các điều kiện tiếp xúc của hai đường tròn nếu chú ý rằng khoảng cách giữa các tâm bằng tổng hoặc hiệu các bán kính tùy theo chúng tiếp xúc ngoài hay tiếp xúc trong. Viết ba điều kiện của bài toán dưới hình thức đại số, ta được ba phương trình:

$$-(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (r \pm r_1)^2 = 0 \quad (1)$$

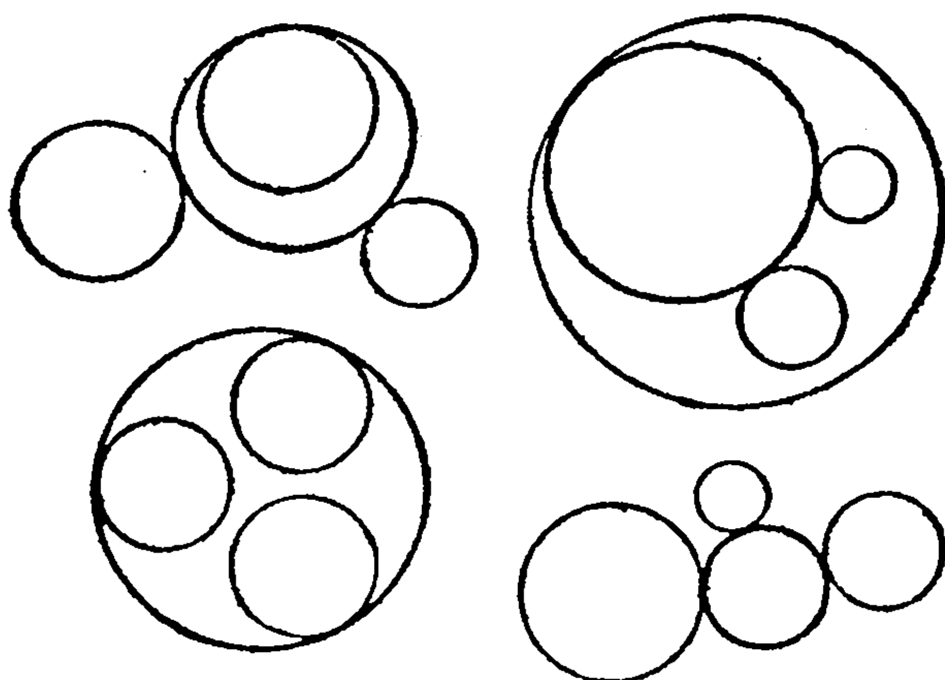
$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (r \pm r_2)^2 = 0 \quad (2)$$

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (r \pm r_2)^2 = 0 \quad (3)$$

sau khi biến đổi có dạng:

$$x^2 + y^2 - r^2 - 2xx_1 - 2yy_1 \pm 2rr_1 + x_1^2 + y_1^2 + r_1^2 = 0 \quad (1a)$$

v.v...., trong mỗi phương trình phải chọn dấu (+) hay dấu (—) tùy theo sự tiếp xúc là ngoài hoặc trong (H. 35). Các phương trình (1) (2), (3) là bậc hai đối với các ẩn x, y, r, nhưng chúng có các số hạng bậc hai nằm trong các tổ hợp giống nhau như ta đã thấy trong dạng khai triển (1a). Bởi thế, nếu trừ (1) cho (2) ta được một phương trình tuyến tính đối với x, y, r:



H. 35. Các đường tròn Apôlôniut

$$ax + by + cr = d \quad (4)$$

trong đó $a = 2(x_2 - x_1)$ v.v .. Cũng vậy, trừ (1) cho (3) ta có phương trình tuyến tính:

$$a'x + b'y + c'r = d' \quad (5)$$

Giải các phương trình (4) và (5) đối với các ẩn x và y, những ẩn này được biểu thị tuyến tính qua r, sau đó thế vào (1) ta được một phương trình bậc hai đối với r giải được bằng các phép toán hữu tỉ và khai căn. Nói chung, phương trình này có hai nghiệm, trong đó chỉ có một nghiệm dương. Tính xong r, ta tìm tiếp các giá trị x và y bằng cách thế (r) vào những công thức đã thu được trước đó. Đường tròn tâm (x, y) bán kính r phải tiếp xúc với ba đường tròn đã cho. Trong toàn bộ quá trình giải chỉ có những phép toán hữu tỉ và phép khai phương tham gia. Từ đó suy ra rằng phép dựng x, y và r có thể thực hiện được chỉ nhờ compa và thước kẻ.

Trong trường hợp tổng quát, bài toán Apôlôniut có 8 lời giải tương ứng với 2.2.2 = 8 tổ hợp có thể được

trong việc chọn các dấu (+) và (—) trong các phương trình (1), (2), (3). Việc lựa chọn các dấu thích hợp phụ thuộc vào kiểu tiếp xúc (trong hoặc ngoài) với mỗi đường tròn cho trước. Quá trình đại số của chúng ta hoàn toàn có thể không dẫn đến các giá trị thực x, y và r. Chẳng hạn, đó là trường hợp cả ba đường tròn cho trước đồng tâm; khi đó thì tất nhiên bài toán hình học của chúng ta không có một lời giải nào. Cũng cần thấy trước khả năng xảy ra trường hợp « suy biến »: chẳng hạn, nếu cả ba đường tròn « suy biến » thành những điểm cùng nằm trên một đường thẳng; khi đó, đường tròn Apôlôniut sẽ « suy biến » thành chính đường thẳng đó. Ta không thấy cần thiết phải xem xét tất cả các chi tiết của vấn đề. Chính bạn đọc có những kỹ năng đại số, sẽ tự làm việc đó.

§2. CÁC SỐ CÓ THỂ DỰNG ĐƯỢC VÀ CÁC TRƯỜNG SỐ

1. Lý thuyết tổng quát. Trong những trình bày ở trên, ta đã cố gắng xác định cái nền đại số chung của các phép dựng hình học. Mỗi phép dựng hình học là một chuỗi các giai đoạn liên tiếp trong số các giai đoạn sau đây: 1) vẽ đường thẳng qua hai điểm, 2) tìm giao điểm của hai đường thẳng, 3) vẽ đường tròn có tâm và bán kính cho trước, 4) tìm giao điểm của đường tròn với một đường tròn khác hoặc một đường thẳng. Một yếu tố (điểm, đường thẳng, đường tròn) được coi là đã biết nếu nó là giả thiết cho trước của bài toán, hoặc nếu đã dựng được nó trong giai đoạn trước của bài toán. Khi phân tích bài toán về mặt lý thuyết, ta mang toàn bộ phép dựng đang xét vào một hệ tọa tọa độ x, y nào đó. Khi đó các yếu tố cho trước được biểu diễn bởi những điểm hoặc những đoạn thẳng trong mặt phẳng x, y. Nếu chỉ cho trước một đoạn thẳng thì nó có thể được thừa nhận là

đoạn đơn vị, do đó một điểm $x = 1$, $y = 0$ được xác định. Có khi, trong quá trình dựng nảy ra những yếu tố tùy ý: vẽ những đường thẳng bất kỳ, dựng những điểm hoặc đường tròn bất kỳ (thí dụ có thể gặp yếu tố bất kỳ khi dựng trung điểm của một đoạn thẳng: vẽ hai đường tròn có tâm là các mút của đoạn thẳng có bán kính bằng nhau tùy ý, sau đó nối các giao điểm lại). Trong những trường hợp tương tự, bao giờ cũng có thể coi yếu tố tùy ý là hữu tỉ: có thể chọn điểm tùy ý sao cho nó có các tọa độ hữu tỉ, một đường thẳng tùy ý $ax + by + c = 0$ sao cho các hệ số a, b, c là hữu tỉ, một đường tròn tùy ý sao cho các tọa độ của tâm và độ dài của bán kính là hữu tỉ. Ta qui ước rằng, nếu có những yếu tố tùy ý tham gia phép dựng thì ta sẽ chọn chúng là hữu tỉ: vì những yếu tố đó thực sự là tùy ý, việc lựa chọn như vậy không ảnh hưởng đến kết quả phép dựng.

Để cho đơn giản, trong lập luận sắp tới ta giả thử rằng trong giả thiết của bài toán chỉ cho một yếu tố — đó là đoạn thẳng có độ dài 1. Khi đó, theo các kết quả §1, ta có thể dựng bằng thước kẻ và compa mọi số thu được từ đơn vị nhờ các phép toán hữu tỉ, tức là các số hữu tỉ r/s, trong đó r và s là các số nguyên. Hệ thống số hữu tỉ là «đóng kín» đối với các phép toán hữu tỉ: tổng, hiệu, tích, thương (bao giờ cũng trừ trường hợp chia cho 0) của hai số hữu tỉ là những số hữu tỉ. Mọi tập hợp số có tính chất đóng kín đối với bốn phép toán hữu tỉ gọi là một *trường số*.

Xuất phát từ đơn vị, có thể xây dựng toàn bộ trường số hữu tỉ, do đó xây dựng được mọi điểm hữu tỉ (tức là những điểm có cả hai tọa độ đều hữu tỉ) trong mặt phẳng x, y. Sau đó, nhờ compa có thể xây dựng những số hữu tỉ loại $\sqrt{2}$, mà ta đã biết là nó đã vượt ra ngoài

giới hạn của trường số hữu tỉ (xem § 2 chương II). Nhưng, dựng xong $\sqrt{2}$, còn có thể dựng tiếp các số dạng $a + b\sqrt{2}$ (1) nhờ các phép dựng hữu tỉ (§1), trong đó a và b là những số hữu tỉ. Cũng có thể dựng các số dạng $\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}}$ hoặc $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})$ trong đó a, b, c, d hữu tỉ. Tuy nhiên, các số này bao giờ cũng có thể viết dưới dạng (1). Thực vậy :

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} \cdot \frac{c - d\sqrt{2}}{c - d\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2} = p + q\sqrt{2},$$

trong đó p và q hữu tỉ. (Mẫu số $c^2 - 2d^2$ khác 0 bởi vì từ $c^2 - 2d^2 = 0$ suy ra $\sqrt{2} = \frac{c}{d}$, điều này mâu thuẫn vì $\sqrt{2}$ vô tỉ). Cũng vậy :

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2} =$$
$$= r + s\sqrt{2},$$

trong đó r và s hữu tỉ. Như vậy, xuất phát từ $\sqrt{2}$, ta có thể dựng được tất cả các số dạng (1) trong đó a và b hữu tỉ.

Như lập luận trước đây đã chứng tỏ, các số dạng (1) tạo thành một trường. Trường này rộng hơn trường số hữu tỉ và chứa nó như một bộ phận (« trường con »). Tất nhiên, trường mới không rộng bằng trường số thực. Ta biểu thị trường số hữu tỉ là F_0, trường số dạng (1) là F_1. Ta đã chứng minh có thể dựng mỗi số thuộc trường « mở rộng » F_1. Có thể tiếp tục mở rộng phạm vi số dựng được, bằng cách sau đây chẳng hạn : chọn một số trong trường F_1, thí dụ số $k = 1 + \sqrt{2}$, đem khai phương nó ta được một số mới có thể dựng được $\sqrt{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{k}$. Số này sẽ sinh ra một trường (§1)

gồm tất cả các số dạng $p + q\sqrt{k}$ (2), trong đó p và q là những số thuộc trường F_1, tức là các số dạng $a + b\sqrt{2}$, trong đó a và b là những số hữu tỉ thuộc F_0.

Tất cả những số này là dựng được với điều kiện chỉ có một đoạn thẳng cho trước ban đầu. Nếu cho trước hai đoạn thẳng thì một đoạn có thể được nhận làm đoạn thẳng đơn vị. Ta giả thiết rằng đoạn thẳng thứ hai được biểu thị qua đoạn thẳng thứ nhất bằng số α. Khi đó có thể dựng một trường G gồm tất cả các số dạng:

$$\frac{a_m\alpha^m + a_{m-1}\alpha^{m-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0}{b_n\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + b_1\alpha + b_0}$$

trong đó $a_0, \ldots, a_m$ và $b_0, \ldots, b_n$ hữu tỉ (m và n là những số nguyên dương tùy ý).

Bây giờ ta sẽ xuất phát từ một giả thiết tổng quát hơn. Giả thử ta biết cách dựng mọi số của một trường số F nào đó. Ta sẽ chứng tỏ rằng *việc chỉ dùng thước kẻ không đưa ta vượt ra ngoài giới hạn của trường F.* Phương trình của đường thẳng đi qua hai điểm tọa độ a_1, b_1 và a_2, b_2 thuộc trường F có dạng: $(b_1 - b_2)x + (a_2 - a_1)y + (a_1b_2 - a_2b_1) = 0$. Các hệ số của phương trình này đều phụ thuộc hữu tỉ vào các số trong trường F và do đó bản thân chúng cũng thuộc trường F. Hơn nữa, nếu ta có hai đường thẳng $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ và $\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$ với các hệ số trong F, thì tọa độ giao điểm của chúng, thu được trong khi giải hệ thống các phương trình đó, sẽ là:

$$x = \frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}, \quad y = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'},$$

Bởi vì chúng cũng là các số trong F, cho nên rõ ràng việc chỉ áp dụng thước kẻ không đưa ta ra khỏi giới hạn của F. Nhưng ta có thể vượt ra khỏi F nhờ compa. Muốn thế, ta chọn trong trường F một số k nào đó sao cho số $\sqrt{k}$ không thuộc F. Số $\sqrt{k}$ cũng như

cac số dang $a + b\sqrt{2}$ (3) trong đó a, b là những số tùy ý trong F là dựng được nhờ compa. Tổng và hiệu của hai số $a + b\sqrt{k}$ và $c + d\sqrt{k}$, tích của chúng

$(a + b\sqrt{k})(c + d\sqrt{k}) = (ac + kbd) + (ad - bc)\sqrt{k}$

và tỉ số của chúng:

$$\frac{a + b\sqrt{k}}{c + d\sqrt{k}} = \frac{(a + b\sqrt{k})(c - d\sqrt{k})}{c^2 - kd^2} =$$

$$= \frac{ac - bd}{c^2 - kd^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - kd^2}\sqrt{k}$$

lại là các số dạng $p + q\sqrt{k}$, trong đó p và q thuộc F. (Mẫu số $c^2 - kd^2$ không triệt tiêu, bởi vì c và d không đồng thời bằng 0; nếu không, ta sẽ có $\sqrt{k} = \frac{c}{d}$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $\sqrt{k}$ không thuộc F). Như vậy, tập hợp các số dạng $a + b\sqrt{k}$ tạo nên một trường F' nào đó. Trường F' chứa trường như F như « một trường con » (chỉ cần đặt $b = 0$). Ta sẽ gọi F' là trường « mở rộng ».

Để làm thí dụ ta xét trường F các số dạng $a + b\sqrt{2}$, trong đó a, b hữu tỉ. Ta lấy $k = \sqrt{2}$. Khi đó, các số của trường mở rộng F' có dạng $(p + q)\sqrt[4]{2}$, trong đó p và q thuộc F, $p = a + b\sqrt{2}$, $q = a' + b'\sqrt{2}$ (các số a, b, a', b' đều hữu tỉ). Mọi số thuộc F' đều có thể viết được dưới dạng đó, chẳng hạn:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt[4]{2}}{(\sqrt{2} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[4]{2})} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt[4]{2}}{2 - \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt[4]{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} - \frac{2 + \sqrt{2}}{4 - 2}\sqrt[4]{2} =$$

$$= (1 + \sqrt{2}) - \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\sqrt[4]{2}.$$

Ta đã chứng minh được rằng, xuất phát từ một trường F các số dựng được nào đó và nếu chọn một số k tùy ý của trường đó, ta có thể dựng số $\sqrt{k}$ bằng thước kẻ và compa, nghĩa là dựng được mọi số dạng $a + b\sqrt{k}$, trong đó a, b thuộc F.

Bây giờ ta sẽ chứng minh đảo lại nếu *chỉ* dùng compa, ta *chỉ* có thể thu được các số có dạng đã nêu. Thực vậy, với một lần áp dụng compa chỉ có thể làm được một trong hai việc: hoặc tìm giao điểm của đường tròn và đường thẳng, hoặc tìm giao điểm của hai đường tròn (mỗi việc tương đương với phép dựng tọa độ giao điểm). Đường tròn tâm ξ, η bán kính r có phương trình $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = r^2$; bởi thế nếu ξ, η, r, thuộc F thì phương trình đường tròn được viết dưới dạng $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$ sẽ có các hệ số α, β, γ cũng thuộc F. Đường thẳng $ax + by + c = 0$ nối hai điểm có tọa độ thuộc F cũng sẽ có các hệ số thuộc F. Khử y từ hai phương trình này ta được một phương trình bậc hai dạng $Ax^2 + Bx + C = 0$ đối với tọa độ x của giao điểm của đường tròn và đường thẳng với các hệ số A, B, C thuộc F (cụ thể $a^2 + b^2 = A$, $2(ac + b^2\alpha - ab\beta) = B$, $c^2 - 2bc\beta + b^2\gamma = C$).

Nghiệm được cho bởi công thức:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

có dạng $p + q\sqrt{k}$, trong đó p, q, k thuộc F. Đối với tọa độ y của giao điểm ta cũng có công thức như vậy.

Mặt khác, nếu đề cập đến hai đường tròn

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2\alpha' x + 2\beta' y + \gamma' = 0,$$

thì khi trừ phương trình này cho phương trình kia, ta được phương trình tuyến tính

$$(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma') = 0$$

có thể giải được nếu kết hợp nó với một trong hai phương trình đường tròn.

Trong cả hai trường hợp, phép dựng sẽ cho ta hai tọa độ của một hoặc hai điểm mới, những đại lượng mới này có dạng $p + q\sqrt{k}$, trong đó p, q, k thuộc F. Đặc biệt bản thân $\sqrt{k}$ có thể thuộc F, chẳng hạn, nếu $k = 4$. Nhưng nói chung điều này không xảy ra.

Ta tóm tắt lại một lần nữa. Xuất phát từ một số đại lượng cho trước nào đó (các đoạn thẳng hoặc các số) bằng thước kẻ, ta có thể dựng được mọi đại lượng của trường F sinh ra bởi các đại lượng cho trước nhờ các phép toán hữu tỉ, nhưng không vượt ra khỏi giới hạn của trường đó. Nếu dùng compa ta sẽ mở rộng trường các đại lượng có thể dựng được và được một trường mới mở rộng F' gồm các số dạng $a + b\sqrt{k}$ trong đó a, b, k thuộc F. Trường F là trường con của trường F'; mọi số thuộc F cũng thuộc F' vì có thể đặt $b = 0$ trong công thức $a + b\sqrt{k}$ (giả thiết rằng $\sqrt{k}$ là một số không thuộc F, nếu trái lại thì F' trùng với F). Ta đã chứng tỏ rằng sau mỗi bước dựng hình (tức là vẽ đường thẳng đi qua hai điểm cho trước, vẽ đường tròn có tâm và bán kính cho trước hoặc tìm giao điểm của hai đường tròn hoặc hai đường thẳng cho trước) hoặc ta thu được những đại lượng thuộc trường ban đầu. hoặc khi dựng một căn bậc hai ta được một trường mới, một trường mở rộng của các đại lượng dựng được.

Bây giờ, ta sẽ xác định chính xác tập hợp tất cả các đại lượng dựng được chỉ bằng thước kẻ và compa. Ta sẽ xuất phát từ một trường F_0 nào đó xác định bởi các đại lượng nằm trong giả thiết của bài toán. Chẳng hạn, đó sẽ là trường số hữu tỉ nếu như chỉ cho trước một đoạn thẳng chọn làm đơn vị. Sau đó « gắn » vào trường một đại lượng $\sqrt{k_0}$ (k_0 thuộc F_0, nhưng $\sqrt{k_0}$ không

thuộc F_0), ta dựng một trường mới F_1 các số dựng được có dạng $a + b_0\sqrt{k_0}$, trong đó a_0, b_0 thuộc F_0. Tiếp đó, nhờ việc « gắn » $\sqrt{k_1}$ (k_1 thuộc F_1, nhưng $\sqrt{k_1}$ không thuộc F_1) vào thì ta được một trường mới F_2 gồm các số có dạng $a_1 + b_1\sqrt{k_1}$ trong đó a_1 và b_1 thuộc F_1. Lặp lại quy trình này, ta đi đến một trường F_n sau việc « gắn » vào n căn thức bậc hai. *Bằng thước kẻ và compa ta có thể dựng được những số mà sau một số hữu hạn lần « gắn » vào theo cách mô tả ở trên vẫn nằm trong trường mở rộng F_n và chỉ dựng được những số đó thôi.*

Số n lần « gắn » vào không có giá trị gì đặc biệt lớn. Tuy nhiên, nó xác định một phần mức độ phức tạp của bài toán đang xét. Ta minh họa quy trình vừa mô tả bằng thí dụ sau. Phải dựng số

$$\sqrt{6} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}} + \sqrt{3}} + 5}$$

Giả thử F_0 là một trường số hữu tỉ. Đặt $k_0 = 2$, ta được trường F_1 chứa số $1 + \sqrt{2}$. Sau đó lấy $k_1 = 1 + \sqrt{2}$ và $k_2 = 3$. Số 3 được chứa trong trường ban đầu F_0, do đó nằm trong trường F_2, vì thế đặt $k_2 = 3$ là hoàn toàn có thể được. Sau đó ta chọn $k_3 = \sqrt{1+2} + \sqrt{3}$ và cuối cùng $k_4 = \sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}} + \sqrt{3}} + 5$. Trường F_5 thu được sau đó sẽ chứa số ta cần có bởi vì $\sqrt{6}$ chứa trong nó $\sqrt{2}$ và $\sqrt{3}$, cho nên tích của $\sqrt{2}$ và $\sqrt{3}$ nằm trong F_3, tức là nằm trong F_5.

2. Mọi số dựng được là số đại số. Nếu trường ban đầu F_0 là trường hữu tỉ (sinh ra bởi đoạn đơn vị) thì mọi số dựng được là các số đại số (định nghĩa số đại số đã nêu ở trang 181). Chính các số của trường F_1 là các nghiệm của những phương trình bậc hai, các số của trường F_2 là các nghiệm của phương trình bậc bốn và tổng quát, các số của trường F_k là các nghiệm của phương trình bậc 2^k với hệ số hữu tỉ. Trước

tiền, ta sẽ chứng minh điều này đối với trường F_2 và bắt đầu bằng một thí dụ. Giả thử $x = \sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$. Ta có $(x - \sqrt{2})^2 = 3 + \sqrt{2}$, $x^2 + 2 - 2\sqrt{2}.x = 3 + \sqrt{2}$ hay $x^2 - 1 = \sqrt{2}(2x + 1)$ là phương trình bậc hai với các hệ số trong F_1. Bình phương hai vế được phương trình $(x^2 - 1)^2 = 2(2x + 1)^2$ là bậc bốn với các hệ số hữu tỉ. Trong trường hợp tổng quát thì một số bất kỳ của trường F_2 sẽ có dạng $x = p + q\sqrt{\omega_1}$ (4) trong đó p, q, ω thuộc trường F_1, tức là có dạng $p = a + b\sqrt{s}$, $q = c + d\sqrt{s}$, $\omega = e + f\sqrt{s}$, trong đó a, b, c, d, e, f, s là những số hữu tỉ. Từ đẳng thức (4) ta có $x^2 - 2px + p^2 = q^2\omega$, trong đó tất cả các hệ số đều thuộc trường F_1 và được sinh ra bởi đại lượng $\sqrt{s}$. Bởi thế có thể viết lại đẳng thức cuối cùng thành đẳng thức $x^2 + ux + v = \sqrt{s}(rx + t)$ (trong đó các hệ số r, s, t, u, v là hữu tỉ). Bình phương lên ta được phương trình bậc bốn $(x^2 + ux + v)^2 = s(rx + t)^2$ (5) với các hệ số hữu tỉ. Đó là điều phải chứng minh.

Muốn kết thúc chứng minh định lý cho trường hợp tổng quát, khi x thuộc trường F_k với chỉ số k tùy ý, chỉ cần chứng tỏ như ở trên rằng x thỏa mãn một phương trình bậc hai với các hệ số trong trường F_{k-1}. Sau đó, bằng cách lặp lại qui trình chứng minh, ta chứng minh rằng x thỏa mãn phương trình bậc $2^2 = 4$ với các hệ số trong trường F_{k-l}, $0 < l \leqslant k$. Khi $l = k$ ta sẽ có kết quả cuối cùng.

§ 3. BA BÀI TOÁN CỔ ĐIỂN KHÔNG GIẢI ĐƯỢC

1. Gấp đôi hình lập phương. Đến đây ta đã chuẩn bị đầy đủ để nghiên cứu các bài toán từ cổ xưa về chia ba một góc, gấp đôi một hình lập phương và dựng hình đa giác bảy cạnh đều. Trước hết ta xét bài toán gấp đôi hình lập phương.

Nếu hình lập phương cho trước có một cạnh bằng đơn vị thì thể tích của nó sẽ bằng một đơn vị thể tích. Cần tìm cạnh x của hình lập phương mà thể tích lớn gấp đôi. Như thế thì cạnh phải tìm thỏa mãn phương trình bậc ba đơn giản: $x^3 - 2 = 0$ (1)

Chứng minh của ta về sự không thể dựng được số x chỉ bằng thước và compa có tính chất « gián tiếp ». Giả thử có thể dựng được như vậy. Thế thì theo các kết quả thu được ở trên, số x phải thuộc vào một trường F_k nào đó suy ra từ trường số hữu tỉ bằng cách « gắn » liên tiếp vào đó các căn thức bậc hai. Bây giờ ta chứng tỏ rằng giả thiết này sẽ dẫn tới mâu thuẫn. Ta đã biết số x không thể thuộc trường số hữu tỉ F_0 bởi vì $\sqrt[3]{2}$ là số vô tỉ. Có nghĩa là phải giả thử rằng nó thuộc vào một trong các trường mở rộng F_k, trong đó k là số nguyên dương. Ta có quyền giả thiết k là số nhỏ nhất trong các số nguyên như vậy, tức là giả thiết x thuộc F_k nhưng không thuộc F_{k-1}. Điều này nghĩa là có thể viết x dưới dạng $x = p + q\sqrt{\omega}$, trong đó p, q và ω thuộc một trường F_{k-1} nào đó, nhưng $\sqrt{\omega}$ không thuộc trường đó. Tiếp đó, bằng cách dựa vào một lập luận đại số khá đơn giản (những lập luận tương tự được áp dụng tương đối nhiều), ta chứng tỏ nếu $p + q\sqrt{\omega}$ là nghiệm của phương trình (1) thì $y = p - q\sqrt{\omega}$ cũng là nghiệm của phương trình đó. Bởi vì x thuộc trường F_k cho nên x^3 và $x^3 - 2$ cũng thuộc trường F_k, nghĩa là :

$$x^3 - 2 = a + b\sqrt{\omega}$$

trong đó a và b thuộc F_{k-1}. Dễ tính được $a = p^3 + 3pq^2\omega - 2$ và $b = 3p^2q + q^3\omega$. Nếu ta đặt $y = p - q\sqrt{\omega}$ thì dễ thấy rằng $y^3 - 2 = a - b\sqrt{\omega}$ (2'). Vì ta đã giả thiết x là nghiệm của phương trình (1) cho nên $a + b\sqrt{\omega} = 0$ (3). Nhưng từ đẳng thức này lại suy ra cả hai số a và b bằng 0 (đây là khâu cơ bản của lập luận !). Thực vậy nếu b khác 0 thì từ (3) ta có đẳng thức $\sqrt{\omega} = -\frac{a}{b}$ trái với giả thiết $\sqrt{\omega}$ không thuộc trường F_{k-1}. Như vậy $b = 0$, khi đó từ (3) suy ra $a = 0$.

Nhưng nếu ta xác nhận rằng $a = b = 0$ thì từ đẳng thức (2') suy ra ngay $y = p - q\sqrt{\omega}$ là nghiệm của phương trình (1) bởi vì $y^3 - 2 = 0$. Hơn nữa, $y \neq x$, tức là $x - y \neq 0$. Vì số $x - y = 2q\sqrt{\omega}$ chỉ có thể triệt tiêu khi $q = 0$ mà trong trường hợp này thì $x = p$ sẽ thuộc vào trường F_{k-1} là điều mà ta không giả thiết.

Ta đã chứng minh rằng nếu $x = p + q\sqrt{\omega}$ là nghiệm của phương trình bậc ba (1) thì $y = p - q\sqrt{\omega}$ là một nghiệm khác không bằng với nó cũng của phương trình ấy. Những điều này dẫn ngay đến mâu thuẫn: $y = p - q\sqrt{\omega}$ là số thực bởi vì các số p, $q\sqrt{\omega}$ đều thực, nhưng phương trình (1) chỉ có một nghiệm thực và hai nghiệm ảo.

Giả thiết ban đầu của chúng ta dẫn đến mâu thuẫn tức là nó sai; bởi thế, nghiệm của phương trình (1) không thể thuộc vào trường K_k. Như vậy, việc gấp đôi hình lập phương chỉ bằng thước và compa là không thể được.

2. Một định lý về phương trình bậc ba. Phần kết thúc của lập luận đại số vừa dẫn thích ứng với một phương trình đặc biệt mà ta đã nghiên cứu đến. Muốn nghiên cứu hai bài toán khác nữa của thời xưa thì phải dựa vào một định lý nào đó có tính chất tổng quát. Với quan điểm đại số thì cả ba bài toán đều liên quan đến việc giải phương trình bậc ba. Ta đã biết nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình bậc ba:

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \qquad (4)$$

(1) Đa thức $z^3 + az^2 + bz + c$ thể viết dưới dạng tích của ba thừa số $(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)$ trong đó x_1, x_2, x_3 là các nghiệm của phương trình (4). Từ đó suy ra đồng nhất thức: $z^3 + az^2 + bz + c = z^3 - (x_1 + x_2 + x_3)z^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)z - x_1x_2x_3$, và bởi vì các hệ số trong các lũy thừa cùng bậc phải bằng nhau cho nên:
$-a = x_1 + x_2 + x_3$, $b = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$, $c = -x_1x_2x_3$.

thì chúng liên hệ với nhau bởi hệ thức :

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a^{(1)} \qquad (5)$$

Ta xét phương trình bậc ba (4) trong đó các hệ số a, b, c là các số hữu tỉ. Tất nhiên, có thể xảy ra trường hợp một trong các nghiệm của phương trình là số hữu tỉ; chẳng hạn phương trình $x^3 - 1 = 0$ có nghiệm 1 là hữu tỉ, khi đó thì hai nghiệm kia thỏa mãn phương trình bậc hai $x^2 + x + 1 = 0$ là các số ảo. Bây giờ ta sẽ chứng minh một định lý tổng quát như sau: *Nếu một phương trình bậc ba với hệ số hữu tỉ không có nghiệm hữu tỉ thì, xuất phát từ trường hữu tỉ F_0, không thể có một nghiệm nào của nó có thể dựng được chỉ nhờ compa và thước kẻ.*

Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp gián tiếp như ở trên. Ta giả thử rằng số x nghiệm đúng phương trình (4) là dựng được. Như vậy x phải thuộc một trường F_k nào đó là trường cuối cùng trong chuỗi các trường mở rộng liên tiếp $F_0, F_1, ..., F_k$. Như trước đây, ta có quyền giả thiết rằng không có nghiệm nào của phương trình (4) thuộc vào trường F_{k-1} (điều mà k không phải là 0 được suy ra ngay từ giả thiết của định lý: x không thể là số hữu tỉ). Như vậy, có thể viết x dưới dạng $x = p + q\sqrt{\omega}$ trong đó p, q, ω thuộc trường F_{k-1} nhưng ω không thuộc F_{k-1}. Chính lập luận đã dẫn ở mục trên đưa đến kết luận rằng số $y = p - q\sqrt{\omega}$ cũng thuộc F_k là nghiệm của phương trình (4). Ta thấy rằng $q \neq 0$ tức là $x \neq y$.

Bây giờ, từ đẳng thức (5) ta kết luận rằng nghiệm thứ ba của phương trình (4) được cho bởi công thức $u = -a - x - y$. Nhưng vì $x + y = 2p$ cho nên $u = -a - 2p$.

Sự biến mất của căn thức $\sqrt{\omega}$ chứng tỏ rằng u thuộc trường F_{k-1}. Điều này mâu thuẫn với giả thiết k là số nguyên nhỏ nhất sao cho trường F_k chứa nghiệm của

phương trình (4). Phải bác bỏ giả thiết đã nêu vì nó dẫn đến mâu thuẫn và phải thừa nhận rằng không có nghiệm nào của phương trình (4) thuộc vào F_k. Định lý đã được chứng minh. Dựa vào định lý này có thể khẳng định rằng một số nào đó là không thể dựng được chỉ bằng thước và compa nếu như ta chứng tỏ được số đó là nghiệm của một phương trình bậc ba với các hệ số hữu tỉ không có nghiệm hữu tỉ. Bây giờ ta đã có thể xem xét hai bài toán còn lại. Ta lưu ý rằng mỗi bài toán này không có hình thức đại số trực tiếp như bài toán đã xét ở trên.

3. Sự chia một góc ra ba phần bằng nhau. Ta sẽ chứng minh rằng trong *trường hợp tổng quát* thì sự chia một góc ra ba phần bằng nhau chỉ bằng thước và compa là không được. Tất nhiên có những góc, chẳng hạn góc 90°, góc 180°, có thể chia ra làm ba phần bằng nhau được. Ta cần chỉ ra rằng không có một qui trình dựng thích hợp với *mọi* góc. Vì phương pháp *tổng quát* phải dùng cho *mọi* góc, cho nên mục tiêu của ta sẽ đạt được nếu ta chỉ ra ít nhất một góc mà không thể chia ba được. Như vậy, sự không tồn tại một phương pháp chia ba tổng quát sẽ được xác nhận, nếu ta chứng tỏ rằng không thể chia ba góc 60° nhờ thước kẻ và compa chẳng hạn.

Có thể tìm được tương đương đại số của bài toán đang xét bằng những phương pháp khác nhau. Phương pháp đơn giản nhất là giả thiết rằng góc θ được cho bởi cosin của nó : $\cos\theta = g$. Những cosin mà ta lưu ý tới liên hệ với nhau bởi công thức lượng giác đơn giản :

$$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$$

Nói cách khác, bài toán chia ba một góc θ (sao cho $\cos\theta = g$) tương đương với việc dựng nghiệm của

phương trình bậc ba: $4z^3 - 3z - g = 0$ (6). Vì, theo trên, ta có quyền đặt $\theta = 60^0$, $g = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$, cho nên phương trình (6) có dạng

$$8z^3 - 6z = 1 \qquad (7)$$

Dựa vào định lý đã được chứng minh trong mục trước, ta chỉ cần chứng tỏ rằng phương trình này không có nghiệm hữu tỉ. Ta đặt $v = 2z$, phương trình sẽ có dạng đơn giản hơn:

$$v^3 - 3v = 1 \qquad (8)$$

Nếu có số hữu tỉ $v = \frac{r}{s}$ thỏa mãn phương trình đó, trong đó r và s là những số nguyên không có thừa số chung (>1) thì ta phải có đẳng thức $r^3 - 3s^2r = s^3$. Từ đó suy ra rằng số $s^3 = r(r^2 - 3s^2)$ chia hết cho r, như thế thì r và s có thừa số chung nếu như r không bằng ± 1. Hoàn toàn tương tự như vậy, ta kết luận rằng số $r^3 = s^2(s + 3r)$ chia hết cho s^2, nghĩa là r và s có thừa số chung, nếu như s không bằng ± 1. Nhưng vì phân số $\frac{r}{s}$ là tối giản theo giả thiết cho nên phải kết luận rằng các số r và s bằng ± 1, tức $v = \pm 1$. Nhưng khi thay thế $v = +1$ và $v = -1$ vào phương trình (8), ta thấy rằng trong cả hai trường hợp, phương trình không được thỏa mãn. Như vậy, phương trình (8) và do đó phương trình (7) không có nghiệm hữu tỉ. Nhờ đó sự không thể chia góc làm ba phần bằng nhau đã được chứng minh.

Định lý này được chứng minh với giả thiết thước kẻ được xem như một dụng cụ để vẽ đường thẳng đi qua hai điểm cho trước chứ không dùng vào việc gì khác nữa. Thực vậy, khi ta nêu đặc trưng của những số dựng được, ta chỉ đề cập đến mặt sử dụng như thế của thước kẻ. Nếu thừa nhận những ứng dụng khác cho thước kẻ thì tập hợp các phép dựng thực

hiện được sẽ được mở rộng rất nhiều. Phương pháp chia ba góc sau đây đã được nêu trong tuyển tập của Acsimét là một thí dụ khá tốt.

Giả sử cho góc x (H. 36). Ta kéo dài cạnh nằm ngang của góc về bên trái và vẽ nửa hình tròn tâm O bán kính r tùy ý. Ta đánh dấu trên thước kẻ các điểm A và B sao cho AB = r. Sau đó dịch chuyển thước kẻ đến vị trí sao cho điểm A của thước nằm trên cạnh kéo dài của góc, điểm B nằm trên nửa hình tròn đã vẽ và đồng thời thước kẻ đi qua giao điểm của cạnh thứ hai của góc với nửa hình tròn. Ở vị trí này của thước kẻ, ta vẽ một đường thẳng tạo với cạnh kéo dài của góc x một góc biểu thị là y.

4. **Hình bảy cạnh đều** Bây giờ ta xét bài toán dựng cạnh x của hình bảy cạnh đều nội tiếp trong hình tròn đơn vị. Đơn giản nhất là giải bài toán bằng số phức (xem chương II, §5). Ta biết rằng các đỉnh của hình bảy cạnh đều là các nghiệm của phương trình $z^7 - 1 = 0$ (9), trong đó các tọa độ x, y của mỗi đỉnh là các phần thực và ảo của số phức $z = x + yi$. Một nghiệm là $z = 1$, các nghiệm còn lại sẽ thỏa mãn phương trình:

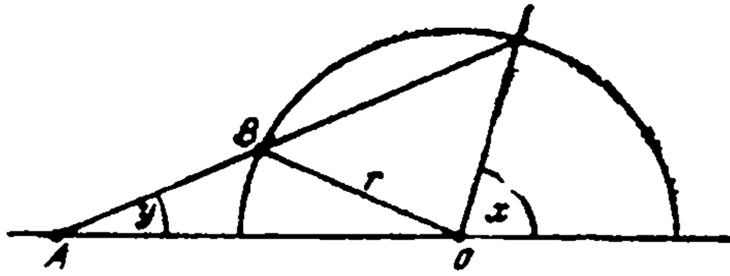
$$\frac{z^7 - 1}{z - 1} = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \qquad (10)$$

Chia cho z^3 ta được phương trình mới:

$$z^3 + \frac{1}{z^3} + z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0 \qquad (11)$$

Các phép biến đổi đại số đơn giản sẽ đưa nó đến dạng:

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 + $$
$$+ \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0 \qquad (12)$$



H. 36. Phương pháp chia ba góc của Acsimet

Đặt $z + \frac{1}{z} = y$, ta được phương trình bậc 3:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0 \quad (13)$$

Ta biết rằng z là căn bậc bảy của đơn vị được cho bởi công thức $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (14) trong đó $\varphi = \frac{360°}{7}$ là góc nhìn từ tâm hình tròn xuống cạnh của đa giác; ngoài ra, ta còn suy ra $\frac{1}{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi$, như thế thì

$$y = z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi.$$

Nếu ta biết cách dựng y thì ta biết dựng cả $\cos\varphi$ và ngược lại. Như vậy, nếu ta chứng minh được rằng không thể dựng được y thì cũng chính là đã chứng minh rằng không thể dựng được cả φ lẫn z; do đó sẽ không dựng được hình bảy cạnh. Cho nên, dựa vào định lý ở mục 2, chỉ còn phải chứng minh rằng phương trình (13) không có nghiệm hữu tỉ. Điều này được chứng minh bằng phương pháp gián tiếp. Giả thử phương trình (13) có nghiệm hữu tỉ $\frac{r}{s}$, trong đó r và s là những số nguyên không có thừa số chung. Nếu vậy, đẳng thức

$$r^3 + r^2s - 2rs^2 - s^3 = 0 \quad (15)$$

phải được thỏa mãn. Từ đó rõ ràng r^3 chia hết cho s, còn s^3 chia hết cho r. Bởi vì r và s là các số nguyên tố cùng nhau, cho nên mỗi số đó phải bằng ±1. Nghĩa là cả y (nếu nó là số hữu tỉ) cũng phải bằng hoặc (+1), hoặc (−1). Nhưng phép thế vào phương trình (13)

chứng tỏ rằng cả 1 và — 1 đều không phải là nghiệm của phương trình. Như vậy, không thể dựng được y và do đó không dựng được cạnh của hình đa giác bảy cạnh đều.

5. Những chú ý về cầu phương trình tròn Các phương pháp tương đối sơ cấp đã giúp ta nghiên cứu đến cùng bài toán gấp đôi hình lập phương, chia ba một góc và dựng hình bảy cạnh đều. Nhưng, bài toán cầu phương hình tròn thì phức tạp hơn nhiều và đòi hỏi những kỹ thuật của giải tích toán. Bởi vì hình tròn bán kính r có diện tích πr^2, cho nên bài toán dựng hình vuông có diện tích bằng diện tích hình tròn có bán kính 1, sẽ tương đương với việc dựng số $\sqrt{\pi}$ bằng cạnh hình vuông phải tìm. Số $\sqrt{\pi}$ chỉ dựng được trong trường hợp số π dựng được. Dựa vào đặc trưng tổng quát của các số dựng được, ta sẽ chứng minh được tính không giải được của bài toán cầu phương trình tròn nếu ta chứng tỏ π không nằm trong một trường F_k nào sinh ra từ trường số hữu tỉ bằng cách « gắn » vào liên tiếp các căn bậc hai. Bởi vì mọi số thuộc vào các trường như vậy là các số đại số, tức là thỏa mãn các phương trình đại số với hệ số nguyên, cho nên sự không giải được của bài toán cầu phương hình tròn sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được π không phải là số đại số, mà là số siêu việt.

Công cụ cần thiết để chứng minh tính siêu việt của số π được Saclơ Ecmit (1822 — 1905) sáng tạo ra, cũng đồng thời để chứng minh tính siêu việt của số e. F. Linđơman (năm 1882) đã hoàn thiện thêm phương pháp Ecmit, chứng minh được tính siêu việt của số π và đã kết thúc vấn đề không giải đáp được từ hàng nghìn năm. Chứng minh của Linđơmán vượt ra ngoài ý định của cuốn sách này, dẫu rằng nó vừa sức với học sinh đã biết ít nhiều về giải tích toán học.

PHẦN 2

CÁC PHƯƠNG PHÁP DỰNG KHÁC NHAU

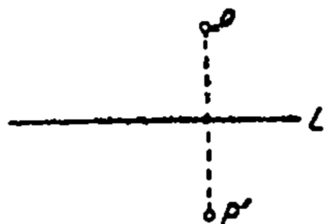
§4. CÁC BIẾN ĐỔI HÌNH HỌC — PHÉP NGHỊCH ĐẢO

1. Chú ý chung Trong phần thứ hai này của chương ta sẽ xem xét một cách có hệ thống một số nguyên tắc chung có thể áp dụng được vào các bài toán dựng. Đa số các bài toán sẽ trở nên dễ hơn rất nhiều nếu xét chúng với quan điểm chung của « các biến đổi hình học ». Đáng nhẽ nghiên cứu từng phép dựng riêng biệt thì ta sẽ nghiên cứu một lớp các bài toán liên hệ với nhau bởi những qui trình biến đổi nào đó. Khả năng làm bộc lộ rõ ràng bản chất sự vật của tư tưởng về lớp các biến đổi hình học hoàn toàn không bị giới hạn ở các bài toán dựng mà còn có quan hệ gần gũi với toàn bộ hình học nói chung. Trong các chương IV và V ta sẽ có dịp đánh giá vai trò của các biến đổi hình học trên phạm vi rộng rãi hơn như vậy. Khi ta buộc phải nghiên cứu một trong những loại biến đổi đặc biệt — *phép nghịch đảo của mặt phẳng đối với một đường tròn* thì đó chỉ là sự mở rộng phép đối xứng trục thông thường.

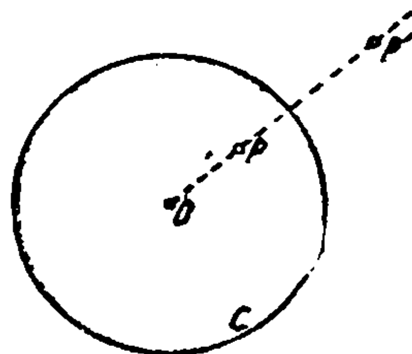
Khi nói về *phép biến đổi* (ánh xạ) của mặt phẳng vào chính nó, ta đề cập đến một quy tắc nào đó cho ứng với mỗi điểm P của mặt phẳng một điểm khác P' cũng thuộc mặt phẳng đó. Thí dụ đơn giản nhất về phép biến đổi như thế là *phép đối xứng trục* của mặt phẳng qua một đường thẳng L cho trước. Điểm P ở một phía của L, sẽ có ảnh là điểm P' ở phía bên kia của L sao cho L vuông góc với đoạn PP' tại trung điểm của nó. Một phép biến đổi có thể giữ nguyên vị trí của những điểm nào đó của mặt phẳng, trong thí dụ

của ta thì đó chính là những điểm của đường thẳng L. Các thí dụ khác của phép biến đổi là *phép quay* của mặt phẳng đối với một điểm cố định O, sau đó đến phép *tịnh tiến song song* chuyển dịch mỗi điểm theo một hướng đã cho với cùng một khoảng cách (những biến đổi này không có điểm bất biến), cuối cùng một thí dụ tổng quát hơn là sự dời hình của mặt phẳng, nó bao gồm các phép quay và phép tịnh tiến song song.

Bây giờ ta để ý đến một lớp các phép biến đổi đặc biệt khác — đó là *phép nghịch đảo* đối với các đường tròn (có khi còn gọi là các phép đối xứng tròn do sự giống nhau của phép biến đổi này với sự phản xạ trong gương cầu). Giả thử, trong mặt phẳng cố định, cho trước một đường tròn C tâm O (gọi là *tâm* hoặc *cực của phép nghịch đảo*) bán kính r. Ảnh của điểm P là điểm P' nằm trên đường thẳng OP ở cùng phía của P đối với O sao cho $OP \cdot OP' = r^2$ (1)



H. 37. Đối xứng của một điểm đối với một đường thẳng.



H.38. Nghịch đảo của một điểm đối với đường tròn.

Từ định nghĩa này ta suy ra nếu P' là ảnh của P thì P sẽ là ảnh của P' (trong biến đổi đã cho). Điều này cho phép ta gọi các điểm P và P' là nghịch đảo của nhau đối với đường tròn C. Phép nghịch đảo biến miền trong của đường tròn thành miền ngoài và ngược lại. Thực vậy, từ bất đẳng thức $OP < r$ suy ra bất đẳng thức $OP' > r$ và, ngược lại từ bất đẳng thức $OP > r$

suy ra bất đẳng thức $OP' < r$. Các điểm bất biến của mặt phẳng là các điểm của bản thân đường tròn C. Qui tắc (1) không xác định một ảnh nào của tâm (cực) O cả. Nhưng rõ ràng rằng khi P dần đến O thì ảnh P' của nó ra xa vô tận. Vì lý do đó mà đôi khi ta nói rằng trong phép nghịch đảo thì ảnh của tâm là *điểm xa vô tận.* Ích lợi của thuật ngữ này ở chỗ nó cho phép ta khẳng định rằng phép nghịch đảo xác định tương ứng một — một giữa tất cả các điểm của mặt phẳng mà không có ngoại lệ. Mỗi điểm của mặt phẳng có một và chỉ một ảnh và bản thân nó là ảnh của một và chỉ một điểm. Ta nhấn mạnh rằng các thí dụ về biến đổi hình học đã dẫn ra ở trên cũng có những tính chất sau cùng này.

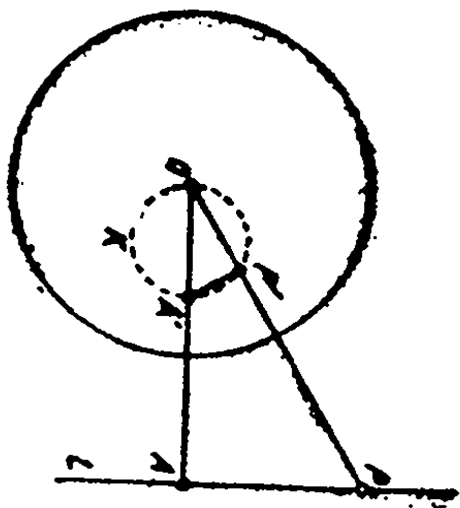
2. Tính chất của phép nghịch đảo. Tính chất quan trọng nhất của phép nghịch đảo là nó biến đổi những đường thẳng và đường tròn thành những đường thẳng và đường tròn. Chính xác hơn, ta có các kết quả sau đây:

a) một đường thẳng đi qua O biến thành một đường thẳng đi qua O.

b) một đường thẳng không đi qua O biến thành một đường tròn đi qua O.

c) một đường tròn đi qua O biến thành một đường thẳng không đi qua O.

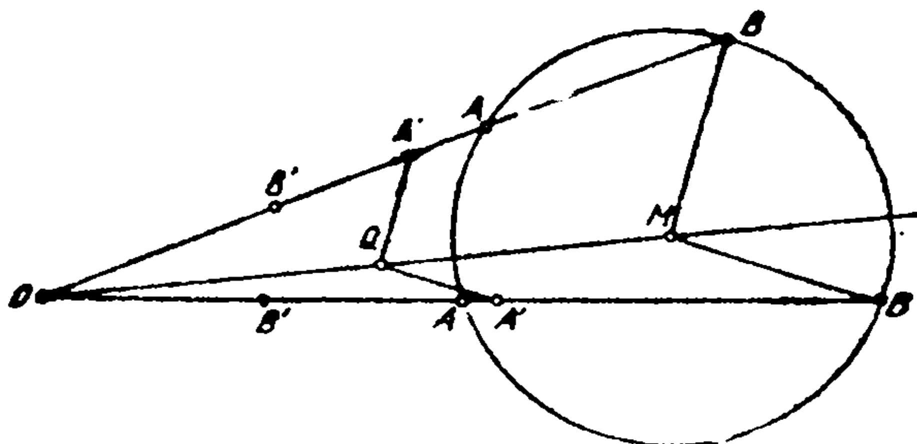
d) một đường tròn không đi qua O biến thành một đường tròn không đi qua O.



H. 39. Nghịch đảo của một đường thẳng đối với đường tròn.

Không cần chứng minh khẳng định a) bởi vì theo định nghĩa phép nghịch đảo thì rõ ràng mỗi điểm trên đường thẳng đang xét có ảnh là một điểm nào đó cũng ở trên đường thẳng ấy, sao cho dầu rằng các điểm riêng biệt trên

đường thẳng có chuyển động nhưng toàn bộ đường thẳng không thay đổi. Ta chứng minh khẳng định b). Từ O ta hạ đường vuông góc xuống đường thẳng L (H. 39).



H. 40. Nghịch đảo của đường tròn.

Giả thử A là chân của đường vuông góc này, A' là một điểm nghịch đảo với điểm A. Ta lấy một điểm P bất kỳ trên đường thẳng L và biểu thị điểm nghịch đảo của nó là P'. Bởi vì $OA \cdot OA' = OP \cdot OP' = r^2$, cho nên:

$$\frac{OA'}{OP'} = \frac{OP}{OA},$$

bởi thế các tam giác OP'A' và OAP đồng dạng và góc OP'A' vuông. Trong trường hợp này thì từ các định lý của hình học sơ cấp suy ra P' nằm trên đường tròn K đường kính OA'. Do đó, đường tròn này cũng là ảnh của đường thẳng L. Như vậy khẳng định b) đã được chứng minh. Khẳng định c) được suy ra từ nhận xét: nếu ảnh của L là K thì ảnh của K là L. Còn phải chứng minh khẳng định d). Giả thử K là đường tròn không đi qua O, tâm M bán kính k (H.40). Muốn tìm ảnh của nó, ta vẽ qua O một đường thẳng cắt K ở các điểm A và B rồi xét xem các ảnh A' và B' biến thiên

thế nào khi hướng của đường thẳng thay đổi và khi nó cắt K theo những cách khác nhau. Biểu thị các khoảng cách OA, OB, OA', OB', OM là a, b, a' b', m và giả thử t là độ dài của tiếp tuyến với K vẽ từ điểm O. Theo định nghĩa phép nghịch đảo ta có $aa' = bb' = r^2$; theo tính chất hình học của đường tròn thì $ab = t^2$. Nếu chia đẳng thức thứ nhất cho đẳng thức thứ hai ta có:

$$\frac{a'}{b} = \frac{b'}{a} = \frac{r^2}{t^2} = c^2,$$

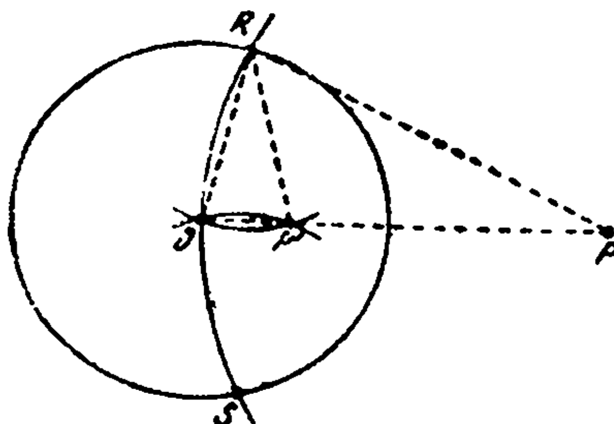
trong đó c^2 chỉ phụ thuộc vào r và t, tức là không phụ thuộc vị trí các điểm A và B. Bây giờ ta vẽ qua A' một đường thẳng song song với BM, gọi Q là giao điểm của nó với OM. Đặt $OQ = q$, $A'Q = \rho$. Khi đó:

$$\frac{q}{m} = \frac{a'}{b} = \frac{\rho}{k} \text{ hoặc } q = \frac{ma'}{b} = mc^2,\ \rho = \frac{ka'}{b} = kc^2.$$

Điều này có nghĩa là với mọi vị trí của A và B thì bao giờ cũng chỉ tồn tại một điểm Q trên đường thẳng OM và khoảng cách A'Q cũng không thay đổi. Cũng như vậy $B'Q = \rho$ bởi vì $\frac{a'}{b} = \frac{b'}{a}$. Như vậy, ảnh của các điểm A và B trên K sẽ là những điểm có khoảng cách đến Q bằng đại lượng ρ không đổi, nói cách khác, ảnh của K là đường tròn. Khẳng định d) đã được chứng minh.

3. Phép dựng bằng hình học các điểm nghịch đảo. Định lý sau đây sẽ có ích cho mục 4 chương này: *Điểm P' là nghịch đảo của điểm P đối với đường tròn C có thể dựng được bằng hình học chỉ nhờ compa.* Đầu tiên

ta xét trường hợp P nằm ngoài hình tròn C. Ta vẽ cung tròn tâm P cắt C ở các điểm R và S. Sau đó lấy các điểm R và S làm tâm ta vẽ các cung tròn bán kính r (bằng bán kính hình tròn tâm C). Những cung này cắt nhau ở O và ở điểm P' trên đường thẳng OP.



H. 41. Nghịch đảo của điểm ở ngoài hình tròn.

Trong các tam giác cân ORP và ORP' thì $\widehat{ORP} =$ $= \widehat{POR} = \widehat{OP'R}$.

Suy ra chúng đồng dạng và $\frac{OP}{OR} = \frac{OR}{OP'}$

hay $OP \cdot OP' = r^2$. Do đó P' là điểm nghịch đảo của điểm P mà ta phải tìm. Nếu điểm P cho trước nằm trong C thì phép dựng và chứng minh vẫn còn hiệu lực nếu đường tròn bán kính OP cắt đường tròn C tại hai điểm. Nếu không cắt nhau thì ta có thể qui về trường hợp trước bằng cách đơn giản hơn như sau. Trước hết, ta chú ý rằng trên đường nối hai điểm A và O đã cho có thể dựng được chỉ bằng compa một điểm C sao cho AO = OC. Muốn vậy chỉ cần vẽ đường tròn tâm O bán kính r = AO. Sau đó, bắt đầu từ điểm A ta đánh dấu liên tiếp trên đường tròn đó các điểm P, Q, C sao cho AP = PQ = QC = r. Như vậy, điểm C sẽ là điểm phải dựng; điều này là rõ ràng vì các tam giác AOP, OPQ, OQC là tam giác đều, góc giữa OA và OC là 180^0 và OC = OQ = AO. Lặp lại qui trình vừa dẫn, ta có thể đặt đoạn AO trên đường thẳng một số lần tùy ý. Bởi

vì độ dài đoạn $AQ = r\sqrt{3}$ (bạn đọc thử lại dễ dàng) cho nên nhân đây ta đã dựng được $\sqrt{3}$ xuất phát từ đoạn đơn vị mà không dùng đến thước kẻ.

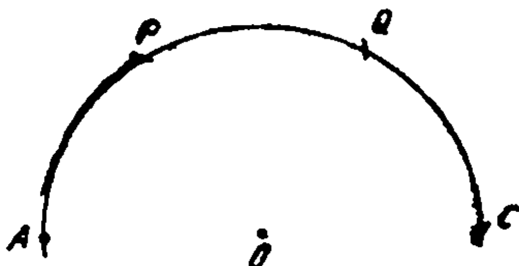
Bây giờ ta đã có thể dựng được điểm nghịch đảo của điểm P đối với đường tròn C nếu P nằm trong C. Trước hết, ta tìm một điểm R nào đó trên đường thẳng OP sao cho OR là bội của OP và R nằm ngoài C: OR=n.OP.

Muốn thế chỉ cần đặt liên tiếp khoảng cách OP bằng compa cho đến khi vượt ra ngoài C. Sau đó, nhờ phép dựng đã biết ta tìm được điểm R' nghịch đảo với điểm R. Lúc này ta có:

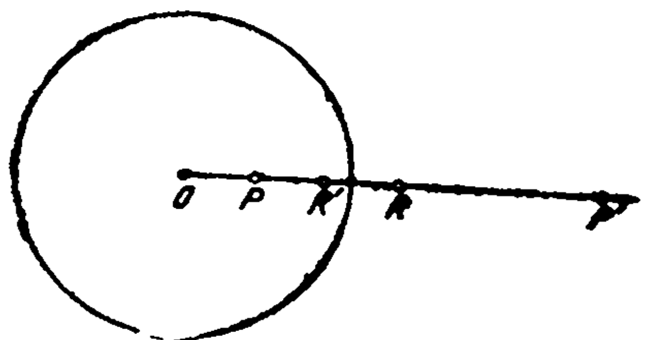
$$r^2 = OR'.\ OR = OR'\ (n\ OP) = (n\ OR')\ .\ OP$$

Còn phải dựng điểm P' theo điều kiện OP' = nOR' và như thế bài toán đã được giải quyết.

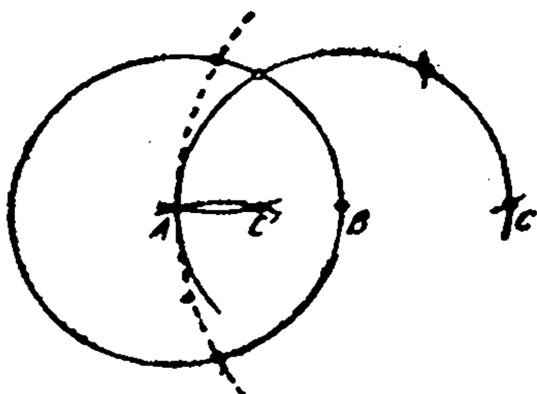
4. Chia đôi một đoạn thẳng và tìm tâm một đường tròn cho trước như thế nào. Sau khi đã biết cách tìm một điểm nghịch đảo với điểm cho trước, ta có thể thực hiện được những phép dựng lý thú tiếp sau bằng compa. Chẳng hạn, bây giờ ta sẽ tìm trung điểm của một đoạn thẳng có các mút A và B cho trước bằng compa mà không cần vẽ bản thân đoạn thẳng đó. Sau đây là lời giải của bài toán này. Ta vẽ đường tròn bán kính AB tâm B và bắt đầu từ A ta đặt liên tiếp ba cung bán kính AB. Điểm cuối cùng C sẽ nằm trên đường thẳng AB, ta có AB = BC.



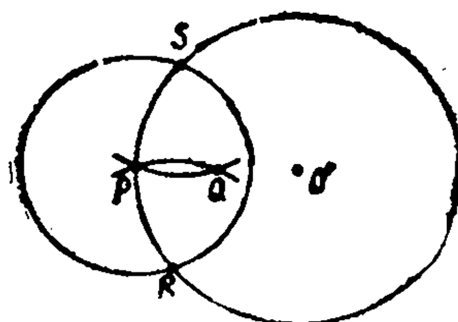
H. 42. Gấp đôi một đoạn thẳng.



H. 43. Phép nghịch đảo một điểm ở trong hình tròn



H. 44. Tìm trung điểm của một đoạn thẳng



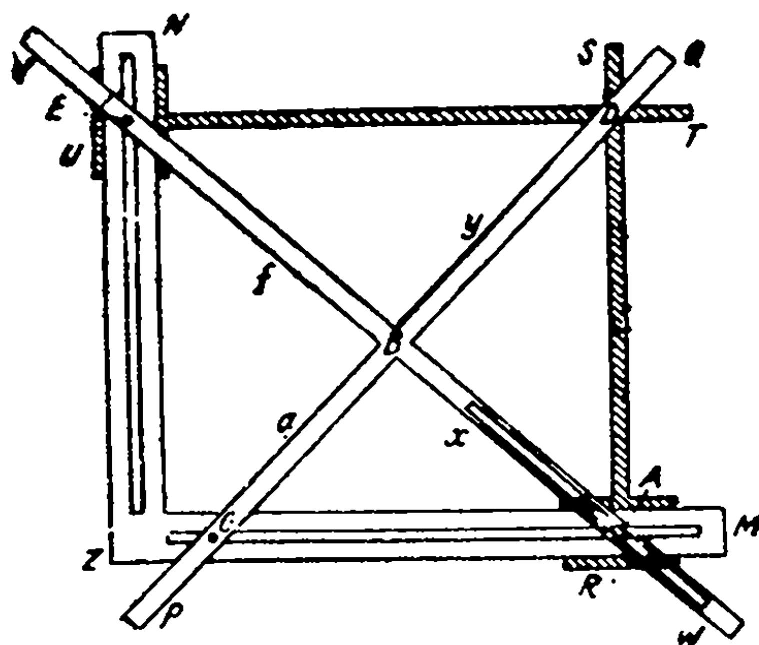
H. 45. Tìm tâm của một hình tròn

Sau đó ta vẽ đường tròn bán kính AB tâm A và dựng điểm C' nghịch đảo của điểm C đối với đường tròn đó. Như vậy ta có: $AC'.AC = AB^2$, $AC'.2AB = AB^2$. $2AC' = AB$. Do đó C' là trung điểm của đoạn thẳng. Một phép dựng khác bằng compa cũng dùng đến điểm nghịch đảo là việc tìm tâm của đường tròn cho trước khi chưa biết tâm đó. Ta lấy một điểm P tùy ý trên đường tròn và lấy nó làm tâm vẽ một đường tròn bán kính tùy ý cắt đường tròn đã cho ở các điểm R và S. Lấy những điểm này làm tâm vẽ các cung bán kính RP=SP cắt nhau ở điểm Q (khác điểm P). So sánh điều đã thu được với H.41, ta thấy rằng tâm Q' chưa biết là điểm nghịch đảo của điểm Q đối với đường tròn tâm P. Như đã biết, ta có thể dựng được Q' bằng compa.

§5. CÁC PHÉP DỰNG NHỜ CÁC DỤNG CỤ KHÁC. CÁC PHÉP DỰNG MAXKÊRÔN BẰNG COMPA

1. Một cách dựng cổ điển để gấp đôi một hình lập phương. Cho đến bây giờ, ta chỉ xét những bài toán dựng hình học mà không dùng đến các dụng cụ khác ngoài compa và thước kẻ. Nếu dùng thêm những dụng cụ khác thì chắc chắn là số các phép dựng khác nhau có thể thực hiện được sẽ tăng lên rất nhiều. Thí dụ sau đây sẽ chứng tỏ người Hy Lạp đã giải bài toán gấp

đôi hình lập phương như thế nào Ta xét (H. 46) một góc vuông cố định MZN và một chữ thập vuông góc động VW PQ. Hai thanh phụ RS và TU có thể trượt nhưng vẫn vuông góc với các cạnh của góc vuông. Trên chữ thập chọn hai điểm cố định B và G, trong đó khoảng cách GB = a và BE = f cho trước. Đặt chữ thập sao cho các điểm E và G theo thứ tự nằm trên NZ và MZ và chuyển dịch các thanh TU và RS đến vị trí sao cho các tia của chữ thập BW, BQ, BV đi qua các đỉnh A, D, E của góc vuông ADEZ. Vị trí đã chỉ ra trên hình vẽ (với điều kiện $f > a$) là luôn luôn có thể được. Ta thấy ngay: $a : x = x : y = y : f$; nếu đặt $f = 2a$ ta được $x^3 = 2a^3$. Do đó x là cạnh hình lập phương có thể tích gấp đôi hình lập phương cạnh a. Như vậy thì bài toán đề ra đã được giải quyết.

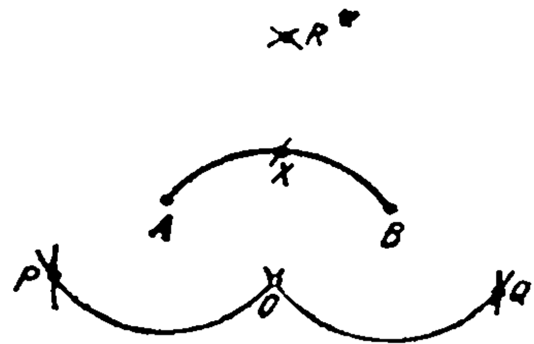


H. 46. Dung cụ gấp đôi hình lập phương

2. Phép dựng chỉ bằng compa. Nếu như khi sử dụng một số nhiều hơn các dụng cụ khác nhau ta sẽ giải được một lớp rộng lớn hơn các bài toán dựng thì, có thể chẳng ta tiên đoán rằng nếu hạn chế bớt số dụng cụ được sử dụng thì lớp các bài toán giải được sẽ thu hẹp lại. Cần đặc biệt lưu ý đến phát minh của nhà toán học Ý Maxkêrôn (1750 — 1800): *mọi phép dựng hình học thực hiện được bằng thước và compa đều có thể thực hiện được chỉ bằng*

compa. Tất nhiên, phải nói thêm rằng, thực ra thì không thể vẽ đường thẳng đi qua hai điểm cho trước mà không dùng thước kẻ, cho nên phép dựng cơ bản này không nằm trong lý thuyết Maxkêrôn. Thay vào đó cần giả thiết rằng một đường thẳng là đã cho trước nếu đã cho trước hai điểm của nó. Tuy nhiên, ta có thể tìm được giao điểm của hai đường thẳng hoặc giao điểm của đường thẳng và đường tròn cho trước bằng cách như vậy.

Có lẽ thí dụ đơn giản nhất của phép dựng Maxkêrôn là sự gấp đôi một đoạn thẳng AB cho trước. Lời giải đã cho ở § 1 phần I. Ngoài ra, ta đã nghiên cứu cách chia đôi một đoạn thẳng cho trước tiếp sau đó. Bây giờ ta xét cách chia đôi một cung tròn AB tâm O. Sau đây là cách dựng (H. 47). Ta vẽ hai cung tâm A và B bán kính AO. Từ điểm O ta đặt trên những cung đó hai cung OP và OQ sao cho OP = OQ = AB. Sau đó ta tìm giao điểm R của cung tâm P bán kính PB và cung tâm Q bán kính QA. Sau cùng lấy đoạn OR làm bán kính ta vẽ cung tâm P hoặc Q cho cắt cung AB — giao điểm sẽ là trung điểm phải tìm của cung AB. Đề nghị bạn đọc chứng minh để luyện tập.



H. 47. Chia đôi cung không dùng thước kẻ.

Không thể chứng minh khẳng định của Maxkêrôn bằng cách chứng tỏ mỗi phép dựng thực hiện được bằng compa và thước kẻ có thể dựng được chỉ bằng compa như thế nào vì có vô số phép dựng như thế. Tuy nhiên có thể đạt được mục đích đó nếu như ta chứng tỏ mỗi phép dựng cơ bản sau đây thực hiện được chỉ bằng compa:

1. Dựng một đường tròn nếu cho trước tâm và bán kính.

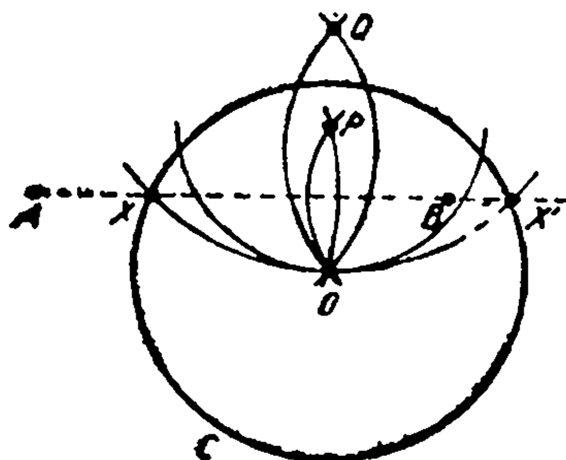
2. Tìm giao điểm của hai đường tròn.

3. Tìm giao điểm của đường thẳng và đường tròn.

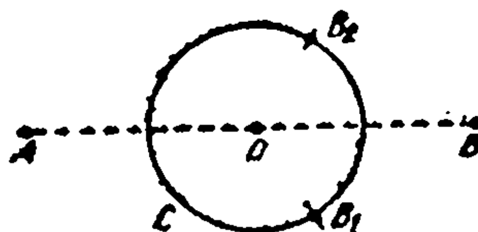
4. Tìm giao điểm của hai đường thẳng.

Một phép dựng hình học bất kỳ (theo nghĩa thông thường, có sử dụng thước và compa) bao gồm việc thực hiện một dãy hữu hạn các phép dựng sơ cấp đó. Hai phép dựng đầu tiên rõ ràng thực hiện được chỉ bằng compa. Các phép dựng 3 và 4 được thực hiện bằng cách áp dụng phép nghịch đảo đã xét trong mục trước.

Xét phép dựng 3: ta tìm giao điểm của đường tròn tâm O cho trước với đường thẳng đi qua các điểm A và B cho trước. Vẽ các cung tâm A và B có các bán kính tương ứng AO và BO; ngoài điểm O, chúng còn cắt nhau ở điểm P. Sau đó, ta dựng điểm Q nghịch đảo của điểm P đối với đường tròn C. Cuối cùng ta vẽ đường tròn tâm Q bán kính QO (chắc chắn nó sẽ cắt C): các giao điểm X và X' của nó với đường tròn C là các giao điểm phải tìm. Muốn chứng minh chỉ cần chứng tỏ rằng mỗi điểm X và X' cách đều O và P (nếu nói đến các điểm A và B thì một tính chất tương tự sẽ được suy ra ngay từ phép dựng). Thực vậy, cần lưu ý rằng điểm nghịch đảo của điểm P sẽ cách các điểm X và



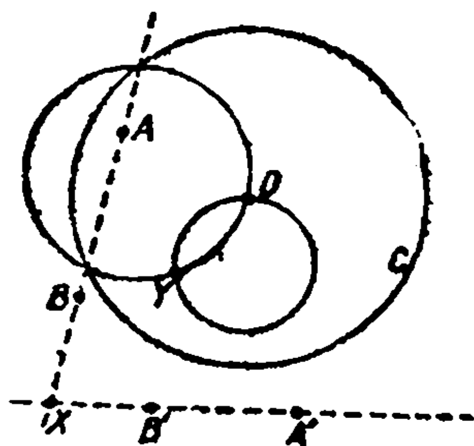
H. 48. Giao điểm của đường tròn và một đường thẳng không đi qua tâm.



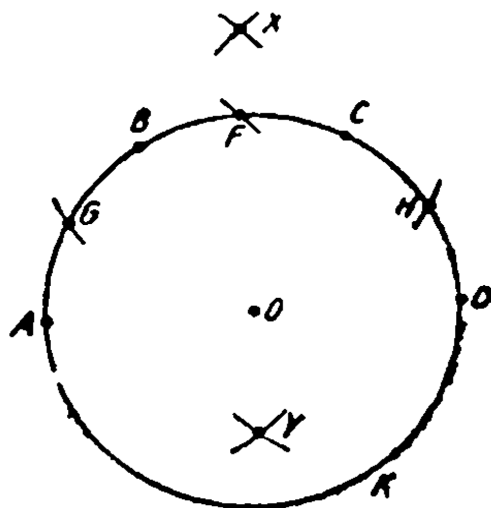
H. 49. Giao điểm của đường tròn và đường thẳng qua tâm.

X' một khoảng bằng bán kính của đường tròn C. Đường tròn đi qua các điểm X, X' và O là nghịch đảo với đường thẳng AB trong phép nghịch đảo đối với đường tròn C, bởi vì đường tròn đó và đường thẳng AB cắt C ở cùng những điểm như nhau. (Trong phép nghịch đảo thì các điểm của đường tròn cơ bản là bất biến).

Phép dựng đã dẫn chỉ không thực hiện được trong trường hợp đường thẳng AB đi qua tâm C. Nhưng khi đó thì có thể dựng được các giao điểm bằng phương pháp đã mô tả ở tập 1, coi như trung điểm các cung của C là đã thu được khi vẽ một đường tròn bất kỳ tâm B cắt C ở các điểm B_1 và B_2. Phương pháp vẽ đường tròn nghịch đảo với đường thẳng nối hai điểm cho trước cho ta ngay phép dựng giải đáp cho bài toán 4. Giả thử có các đường thẳng được cho trước bởi các điểm A, B và A', B' (H.50). Vẽ đường tròn O tùy ý và nhờ



H.50. Giao điểm của hai đường thẳng



H.51. Dựng ngũ giác đều.

phương pháp đã dẫn ở trên vẽ các đường tròn nghịch đảo với đường thẳng AB và A'B'. Những đường tròn này cắt nhau ở điểm O và một điểm khác Y. Điểm X nghịch đảo của điểm Y sẽ là giao điểm phải tìm, cách dựng nó đã được giải thích ở trên. X là điểm phải tìm vì Y là điểm duy nhất nghịch đảo với điểm đồng thời

thuộc cả hai đường thẳng AB và A'B', do đó điểm X nghịch đảo với điểm Y phải đồng thời nằm trên AB và A'B'.

Bằng hai phép dựng này, ta kết thúc chứng minh sự tương đương giữa các phép dựng Maxkêrôn chỉ dùng đến compa với các phép dựng hình thông thường có dùng thước kẻ và compa. Ta sẽ không đề ý đến sự đẹp đẽ của lời giải các bài toán riêng biệt xét đến ở đây bởi vì mục đích của ta là làm sáng tỏ ý nghĩa nội tại của các phép dựng Maxkêrôn. Tuy nhiên ta còn dẫn ra phép dựng ngũ giác đều làm thí dụ, nói chính xác hơn, ta đề cập đến việc tìm năm điểm trên đường tròn có thể là các đỉnh của một ngũ giác đều nội tiếp. Giả thử A là một điểm tùy ý của đường tròn K. Vì cạnh của lục giác đều nội tiếp bằng bán kính đường tròn, cho nên ta dễ dàng đặt trên K các điểm B, C, D sao cho $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = 60^0$ (H.51). Vẽ các cung tâm A và D có bán kính bằng AC, chúng cắt nhau ở X. Khi đó, nếu O là tâm của K thì cung tâm A bán kính OX sẽ cắt K ở điểm F là trung điểm của cung BC. Sau đó vẽ cung tròn tâm P có bán kính của K cắt K ở các điểm G và H. Giả thử Y là một điểm mà các khoảng cách tới các điểm G và H bằng OX. Điểm Y và X ở về hai phía của tâm O. Trong trường hợp này thì đoạn thẳng AY là cạnh của ngũ giác đều phải tìm. Việc chứng minh dành cho bạn đọc để luyện tập. Lưu ý rằng khi dựng ta chỉ dùng ba bán kính khác nhau. Năm 1928 nhà toán học Đan mạch Êlimxlep đã tìm thấy trong một hiệu sách ở Côpenhagen một bản của cuốn sách có tên « Euclides Danicus » được xuất bản năm 1672 bởi một tác giả không tên tuổi G. Morơ. Theo trang phụ bìa, có thể kết luận rằng đó chỉ là một trong những bản « Khởi đầu » của Ơclid có chú thêm lời bình luận có thể là của người biên soạn. Khi xem xét kỹ ta thấy rằng ở cuối

sách đó có lời giải đầy đủ của bài toán Maxkêrôn đã được tìm thấy khá lâu trước Maxkêrôn.

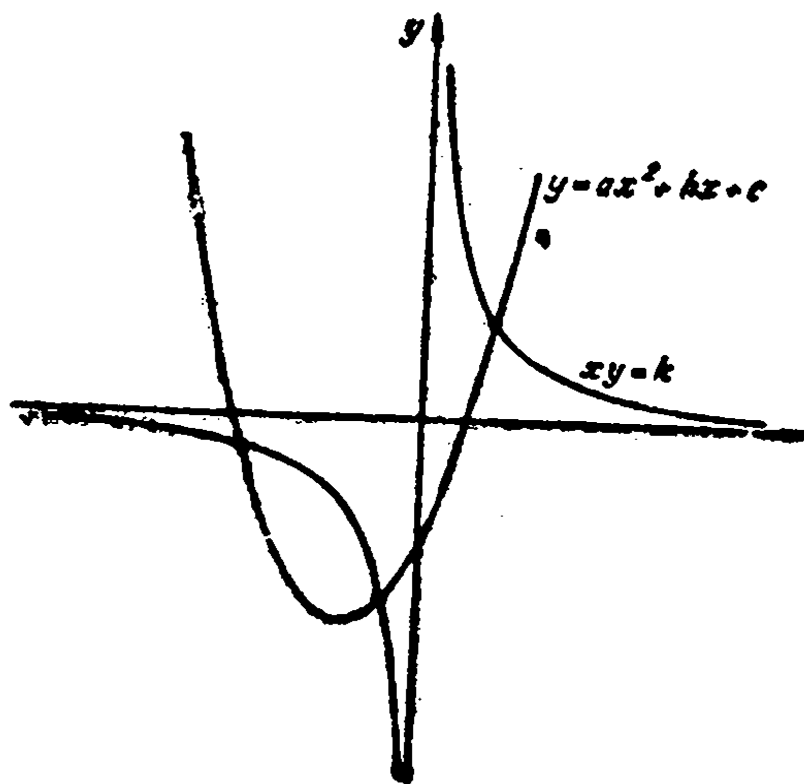
Được sự cổ vũ của các kết quả Maxkêrôn, Iakôp Stâyner (1796 — 1863) đã nghiên cứu các phép dựng thực hiện được chỉ bằng thước kẻ.

Tất nhiên, nếu chỉ dùng thước kẻ ta không thể vượt khỏi giới hạn của một trường số cho trước, cho nên thước kẻ là chưa đủ để thực hiện mọi phép dựng hình học với nhận thức cổ điển của chúng. Nhưng, những kết quả mà Stâyner thu được còn đáng lưu ý hơn nếu hạn chế chỉ dùng compa một lần. Ông đã chứng minh rằng mọi phép dựng trên mặt phẳng thực hiện được nhờ compa và thước kẻ cũng thực hiện được chỉ nhờ thước kẻ với điều kiện cho trước một đường tròn cố định và tâm của nó*. Các phép dựng đó dựa vào các phương pháp chiếu sẽ được mô tả sau này.

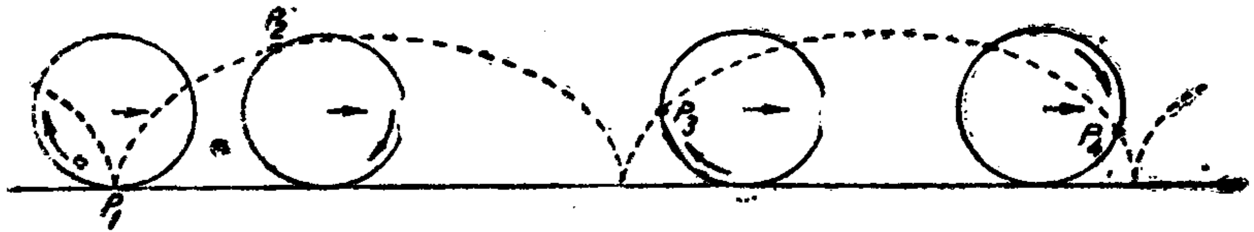
Nếu không có hình tròn này và tâm của nó thì sẽ không thể dựng được. Chẳng hạn, nếu cho trước đường tròn và chỉ dùng thước kẻ thì không thể tìm tâm của nó được. Bây giờ ta sẽ chứng minh điều đó dựa vào một sự kiện mà sau này sẽ được chứng minh: có một biến đổi của mặt phẳng trên chính nó sao cho a) một đường thẳng cho trước là bất biến, b) mọi đường thẳng biến thành một đường thẳng, c) tâm của đường tròn bất biến không bất biến mà biến thiên. Bản thân sự tồn tại một phép biến đổi như vậy đã chứng tỏ nếu chỉ dùng thước kẻ thì không thể dựng được tâm đường tròn cho trước. Thực vậy, dù quá trình dựng như thế nào, nó cũng được qui về một dãy các giai đoạn riêng biệt bao gồm việc vẽ những đường thẳng và vẽ những giao điểm của chúng với nhau hoặc với đường tròn cho trước. Bây giờ, ta hình dung toàn bộ hình đường tròn và tất cả các đường thẳng đã được vẽ bằng thước kẻ trong khi dựng tâm — sẽ chịu một biến đổi mà sự tồn tại của biến đổi này ta đã giả thiết ở đây. Khi đó rõ ràng hình thu được sau biến đổi cũng thỏa mãn mọi yêu cầu của phép dựng, nhưng đã cho ta một lời giải khác với tâm của đường tròn đã cho. Nghĩa là không thể có phép dựng mà ta vừa nói.

3. Phép vẽ nhờ các dụng cụ cơ học khác nhau. Các đường cong cơ học. Xycloid Việc sáng chế các máy cơ học dùng để vẽ các đường cong khác nhau, ngoài đường tròn và đường thẳng, sẽ mở rộng rất nhiều phạm vi các hình có thể dựng được. Chẳng hạn, nếu có một dụng cụ để vẽ hypebol $xy = k$ và một dụng cụ khác để vẽ parabol $y = ax^2 + bx + c$ thì mọi bài toán dẫn đến phương trình bậc ba $ax^3 + bx^2 + cx = k$ có thể giải được bằng dựng hình chỉ nhờ các dụng cụ đó. Thực vậy, việc giải phương trình(1) tương đương với việc giải hệ $xy = k$, $y = ax^2 + bx + c$ (2), nói chính xác hơn các nghiệm của phương trình(1) là tọa độ x của các giao điểm của hypebol và parabol biểu thị bởi các phương trình(2). Như vậy sẽ dựng được các nghiệm của phương trình (1) nếu dùng các dụng cụ để vẽ các đường cong (2).

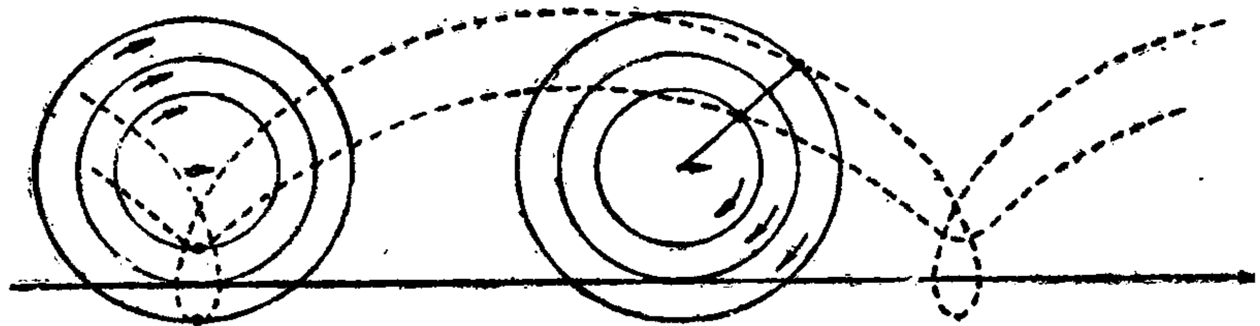
Từ xưa, các nhà toán học đã biết đến nhiều đường cong lý thú có thể xác định và vẽ nhờ các dụng cụ cơ học đơn giản. Trong những đường cong « cơ học » như vậy thì các đường Xyclôid có vị trí đặc biệt. Ptôlêmê



H. 52. Giải phương trình bậc ba bằng đồ thị.



H. 53. Xyclôid

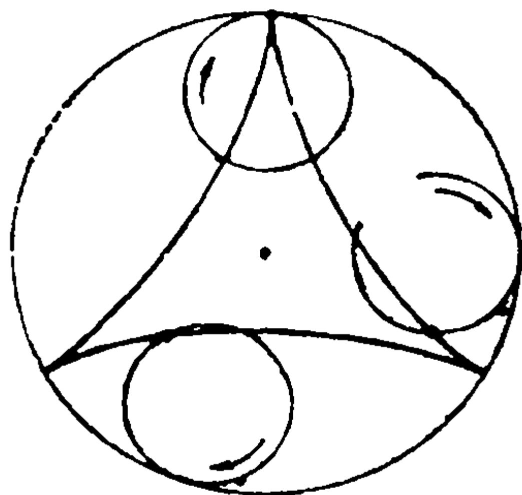


H. 54. Xyclôid dạng tổng quát

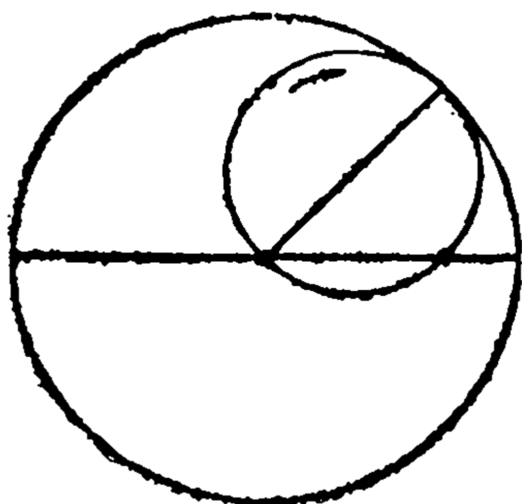
(khoảng 200 năm trước công nguyên) đã biết dùng những đường cong này để mô tả chuyển động của các hành tinh.

Xyclôid đơn giản nhất là quĩ đạo chuyển động của một điểm P cố định trên vành một cái đĩa quay nhưng không trượt trên một đường thẳng — Trên H.53 có vẽ bốn vị trí của điểm P ở những thời điểm khác nhau. Xyclôid nom như một dãy các vòm tựa trên một đường thẳng nằm ngang. Nếu lấy điểm P ở trong đĩa (cũng như trên nan hoa của bánh xe), hoặc trên phần kéo dài của bán kính bên ngoài đĩa, ta sẽ được các biến dạng của đường cong đó. Hai đường cong như thế được biểu thị trên H.54. Các biến dạng khác của xyclôid được sinh ra khi đĩa không quay trên đường thẳng mà quay trên cung của một đường tròn. Nếu đĩa quay c bán kính r luôn luôn tiếp xúc *trong* với đường tròn lớn C bán kính R mà nó tựa thì quĩ đạo của một điểm cố định trên vành đĩa được gọi là *hipôxyclôit*.

Nếu đĩa quay trên toàn bộ đường tròn C đúng một lần thì điểm P sẽ quay trở lại vị trí ban đầu khi và chỉ khi bán kính của C là bội của bán kính của c. H.55 biểu thị một hypôxyclôid đóng kín tương ứng với $R = 3r$. Trong trường hợp tổng quát, nếu $R = \frac{m}{n} r$ thì hypôxyclôid chỉ đóng kín sau khi đĩa c quay theo đường tròn C đúng n lần và sẽ có m vòm. Ta lưu ý đặc biệt đến trường hợp $R = 2r$. Trong trường hợp này thì một điểm P tùy ý trên vành đĩa sẽ vạch nên một trong các đường kính của đường tròn lớn C (H.56). Đề nghị bạn đọc chứng minh điều này như một bài tập.



H. 55. Hypoxycloid ba sừng

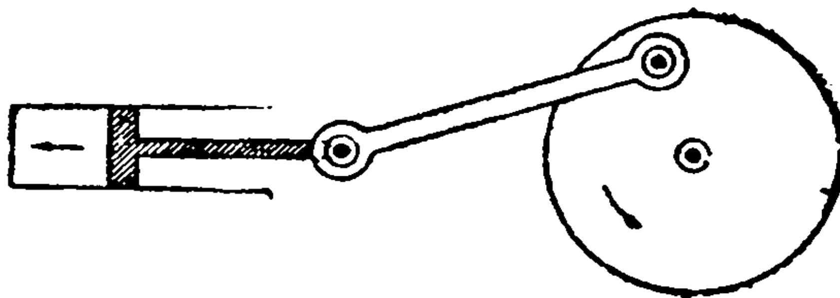


H. 56. Chuyển động thẳng khi một hình tròn quay trên một đường tròn có bán kính gấp đôi.

Khi đĩa c quay theo đường tròn O luôn luôn tiếp xúc *ngoài* với nó ta sẽ thu được một loại Xyclôid nữa. Những đường cong loại này có tên là *Epixyclôid*.

2. Cơ cấu bản lề. Các máy nghịch đảo Pôxeliê và Cart. Vấn đề về các Xyclôid được dừng lại ở đây (các Xyclôid còn xuất hiện một lần nữa trong cuốn sách

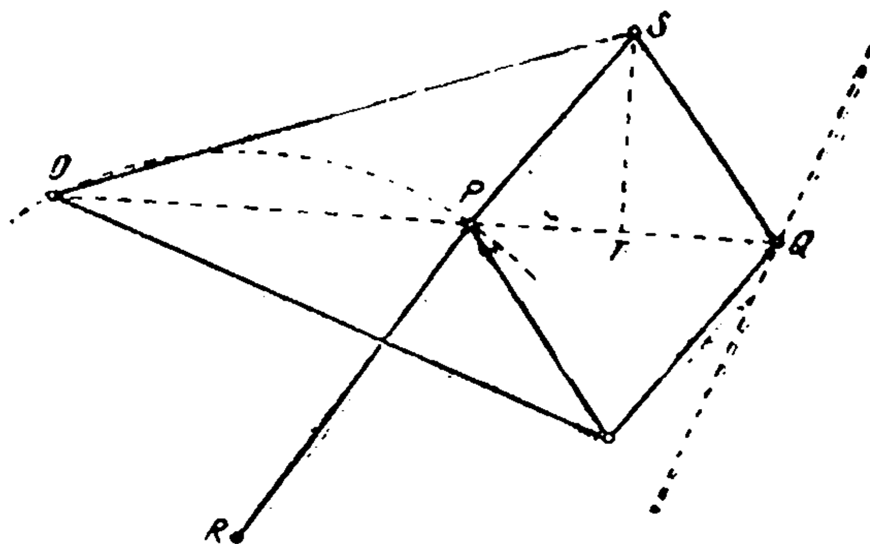
này. Ta xét đến các phương pháp cơ học khác để tái tạo các đường cong. Bây giờ ta nghiên cứu các *cơ cấu bản lề*. Một cơ cấu loại này là một hệ thống các thanh cứng khớp với nhau, có một độ tự do nào đó, sao cho mỗi điểm của nó vẽ được một đường cong nhất định. Compa cũng là một cơ cấu bản lề đơn giản nhất, về thực chất gồm một thanh có một đầu cố định. Các cơ cấu bản lề đã được ứng dụng từ lâu như những bộ phận cấu thành các máy. Một trong những thí dụ nổi tiếng nhất (về phương diện lịch sử) là « hình bình hành Watt ». Thiết bị này do Giêm Watt sáng chế trong khi giải quyết bài toán sau đây: làm thế nào liên kết pittông với một điểm của bánh đà để bánh xe chuyền cho pittông một chuyển động thẳng? Watt chỉ cho được một lời giải gần đúng, dù rằng với sự cố gắng của các nhà toán học giỏi nhất, bài toán thiết bị một cơ cấu chuyền cho một điểm một chuyển động thẳng *chính xác* trong một thời gian dài vẫn chưa được giải. Thậm chí, đã có ý kiến cho rằng một cơ cấu như thế là không thực hiện được: những chứng minh về sự không thể được « loại như vậy » đã thu hút được sự



H. 57. Biến đổi chuyền động thẳng thành chuyền động quay.

quan tâm rộng rãi. Sự sửng sốt của các nhà toán học càng tăng lên khi một sĩ quan hải quân người Pháp Pòxeliê (năm 1864) đã sáng chế ra một cơ cấu không phức tạp nhằm giải đáp bài toán theo chiều hướng thuận. Do sử dụng những chất bôi trơn tốt, bài toán

kỹ thuật đã mất ý nghĩa đối với máy hơi nước. Ý đồ của cơ cấu Pôxeliê là biến đổi chuyển động tròn thành chuyển động thẳng. Cơ sở của cơ cấu này là lý thuyết phép nghịch đảo đã trình bày trong § 4. Như ta thấy trên H. 58, cơ cấu gồm bảy thanh cứng, hai thanh có độ dài t, bốn thanh có độ dài S và một thanh có



H. 58. Máy nghịch đảo Pôxeliê biến chuyển động quay thành thẳng

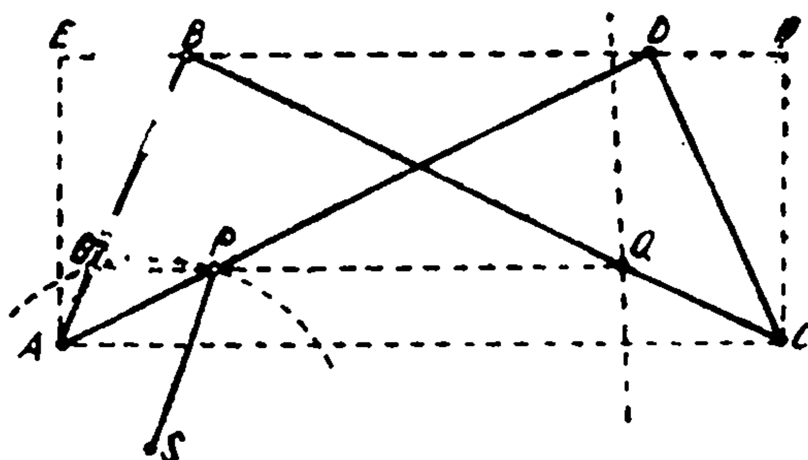
độ dài tùy ý. Các điểm O và R được cố định lại và sắp xếp sao cho OR = PR. Toàn bộ dụng cụ có thể vận hành được những vẫn tuân theo các điều kiện đã nêu ở trên. Bây giờ, ta chứng tỏ rằng *khi điểm P vạch một cung tròn tâm R bán kính RP thì điểm Q sẽ vạch một đoạn thẳng.* Biểu thị chân đường vuông góc hạ từ điểm S xuống đường thẳng OPQ là T, ta nhận thấy rằng

$$OP \,.\, OQ = (OT - PT) \,.\, (OT + PT) = OT^2 - PT^2 =$$
$$= (OT^2 + ST^2) - (PT^2 + ST^2) = t^2 - s^2$$

Đại lượng $t^2 - s^2$ không đổi; ta đặt $t^2 - s^2 = r^2$. Vì $OP \,.\, OQ = r^2$ cho nên các điểm P và Q là nghịch đảo của nhau đối với đường tròn tâm O bán kính r. Khi P vạch nên cung tròn đi qua O thì Q vạch nên đường cong nghịch đảo của cung này. Nhưng, đường cong

nghịch đảo với đường tròn đi qua O là một đường thẳng. Như vậy quĩ đạo của điểm Q là một đường thẳng và máy nghịch đảo Poxeliê sẽ vẽ được đường thẳng này mà không cần thước kẻ.

Một cơ cấu khác cũng giải quyết được bài toán, đó là máy nghịch đảo của Gart. Nó chỉ gồm có năm thanh, khớp của chúng được chỉ ra trên H. 59. Ở đây, AB = CD, BC = AD; O, P và Q là những điểm cố định theo thứ tự trên các thanh AB, AD và CB sao cho $\frac{AO}{OB} = \frac{AP}{PD} = \frac{CQ}{QB} = \frac{m}{n}$. Các điểm O và S được cố định và bất động trong mặt phẳng với điều kiện OS = PS. Không có các mối liên hệ khác và cơ cấu có thể chuyển động. Tất nhiên, đường thẳng AC bao giờ cũng song song với đường thẳng BD. Trong trường hợp này, các điểm O, P và Q thẳng hàng và đường thẳng OP song song với đường thẳng BD. Ta có:



H. 59. Máy nghịch đảo Gart

$$AC \cdot BD = EF \cdot BD = (ED + EB) \cdot (ED - EB) = ED^2 - EB^2$$

Nhưng $ED^2 + AE^2 = AD^2$ và $EB^2 + AE^2 = AB^2$ cho nên $ED^2 - EB^2 = AD^2 - AB^2$

Hơn nữa:

$$\frac{OP}{BD} = \frac{AO}{AB} = \frac{m}{m+n} \text{ và } \frac{OQ}{AC} = \frac{OB}{AB} = \frac{n}{m+n}$$

Do đó: $OP \cdot OQ = \frac{mn}{(m+n)^2}$.

$$BD \cdot AC = \frac{mn}{(m+n)^2}(AD^2 - AB^2)$$

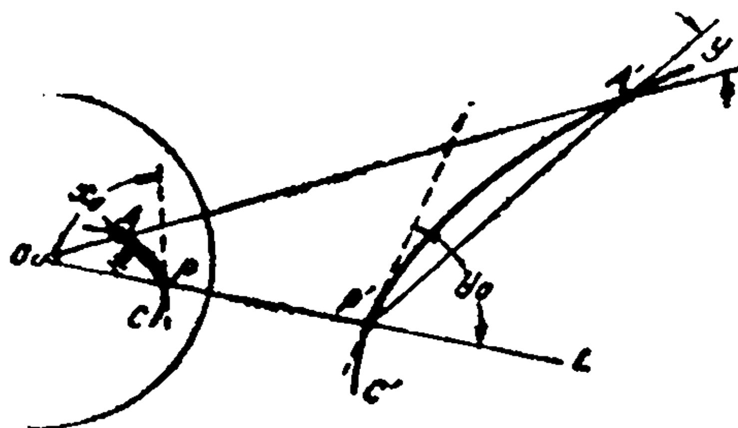
Đại lượng cuối cùng này không thay đổi khi ta chuyển dịch cơ cấu. Bởi thế các điểm P và Q là nghịch đảo của nhau đối với một đường tròn tâm O nào đó. Khi chuyển dịch cơ cấu, điểm P vạch nên đường tròn tâm S đi qua O; do đó điểm nghịch đảo Q sẽ vạch nên một đường thẳng.

Có thể xây dựng — ít nhất là về mặt lý thuyết — những cơ cấu bản lề khác để vẽ elip, hypebol và thậm chí để vẽ bất kỳ đường cong đại số $f(x, y) = 0$ cho trước dù bậc là bao nhiêu.

§ 6. NÓI THÊM VỀ PHÉP NGHỊCH ĐẢO VÀ CÁC ỨNG DỤNG CỦA NÓ

1. Tính bất biến của các góc. Họ đường tròn. Tuy rằng phép nghịch đảo tròn là một biến đổi thay đổi khá rõ hình dạng bên ngoài của các hình hình học, nhưng có một điều rất đáng lưu ý là, các hình thu được còn giữ lại được một số tính chất của các hình ban đầu. Những tính chất không mất đi trong một biến đổi được gọi là các tính chất *bất biến*. Ta đã biết, trong phép nghịch đảo thì đường tròn hoặc đường thẳng sẽ biến thành đường tròn hoặc đường thẳng. Bây giờ ta bổ sung một tính chất quan trọng nữa của phép nghịch đảo: trong phép nghịch đảo thì góc giữa hai đường thẳng hoặc đường cong không thay đổi. Nếu nói tỉ mỉ hơn thì điều này có nghĩa là phép nghịch đảo sẽ biến đổi hai đường cong cắt nhau thành hai đường cong khác cũng cắt nhau theo một góc bằng góc ban đầu. Góc giữa hai đường cong được coi là góc giữa các

tiếp tuyến của chúng. Chứng minh được suy ra từ H.60, ở đây ta xét trường hợp riêng về sự cắt nhau ở điểm P của một đường cong C bất kỳ với một đoạn thẳng OL đi qua tâm nghịch đảo O. Đường cong C' nghịch đảo của đường cong C sẽ cắt OL ở điểm P' nghịch đảo của



H. 60. Tính bất biến của các góc trong phép nghịch đảo

P, bởi vì P' cũng như P đều nằm trên OL. Ta chứng minh góc x_0 giữa OL và tiếp tuyến với đường tròn C ở điểm P có số đo bằng góc y_0 giữa OL và tiếp tuyến của C' ở điểm P'. Muốn thế, ta chọn điểm A trên đường cong C ở gần P và vẽ cát tuyến AP.

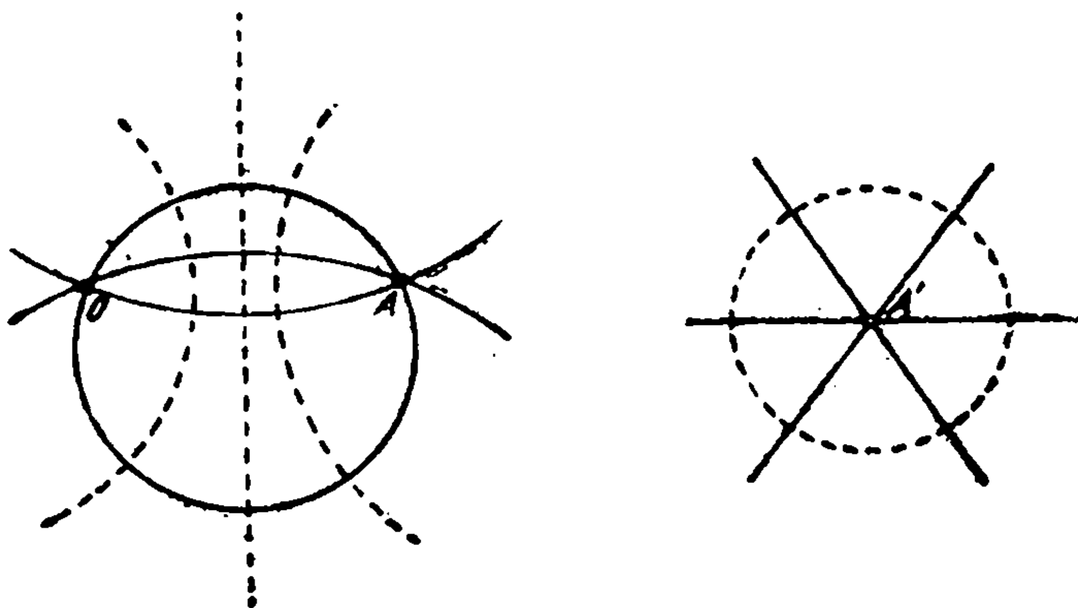
Điểm nghịch đảo của A là A'. Vì A' nằm trên đường thẳng OA và trên đường cong C', cho nên A' là giao điểm của chúng. Ta vẽ cát tuyến A'P'. Theo định nghĩa phép nghịch đảo $r^2 = OP \cdot OP' = OA \cdot OA'$ hoặc: $\frac{OP}{OA} = \frac{OA'}{OP'}$ ta suy ra các tam giác OAP và OA'P' đồng dạng. Có nghĩa là góc x bằng góc OA'P' mà ta biểu thị là y. Bước cuối cùng trong lập luận của chúng ta là buộc điểm A phải tiến dần đến P theo đường cong C. Khi đó, cát tuyến AP trở thành tiếp tuyến với đường cong C tại P và góc x dẫn tới X_0. Đồng thời, A' sẽ dẫn tới P' và đường thẳng A'P' trở thành tiếp tuyến của

đường cong C' tại điểm P' và góc y sẽ dần tới y_0. Bởi vì với mọi vị trí của điểm A ta có đẳng thức $x=y$, cho nên đẳng thức này vẫn được bảo toàn khi tới giới hạn $x_0=y_0$.

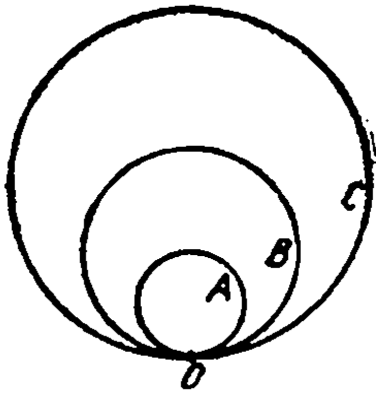
Chứng minh còn chưa kết thúc vì ta mới chỉ xét trường hợp giao nhau của đường cong C với đường thẳng đi qua tâm O. Nhưng bây giờ thì việc xét trường hợp giao nhau tổng quát của hai đường cong tùy ý C và C* đã rất dễ dàng. Giả thử những đường cong này cắt nhau ở điểm P và tạo với nhau một góc Z. Như vậy, đường thẳng OPP' sẽ chia góc này làm hai góc, mỗi góc nói riêng đều không đổi qua phép nghịch đảo.

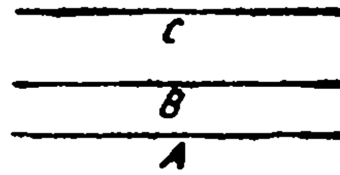
Cần nói thêm rằng tuy phép nghịch đảo không thay đổi độ lớn của góc, song lại thay đổi *hướng* của nó : ta hình dung khi góc X_0 tăng mà một cạnh của nó bất động còn cạnh kia quay ngược chiều kim đồng hồ thì cạnh di động của góc « nghịch đảo » tương ứng sẽ quay theo chiều kim đồng hồ.

Hệ quả về tính bất biến của các góc trong phép nghịch đảo là hai đường tròn hoặc đường thẳng trực giao (tức là cắt nhau theo góc vuông) sẽ giữ nguyên tính chất này sau phép nghịch đảo và, nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau (« cắt nhau tạo thành góc bằng O ») thì các đường tròn nghịch đảo với chúng cũng tiếp xúc nhau.



H.61 Biến đổi hai hệ thống các đường tròn trực giao bằng phép nghịch đảo



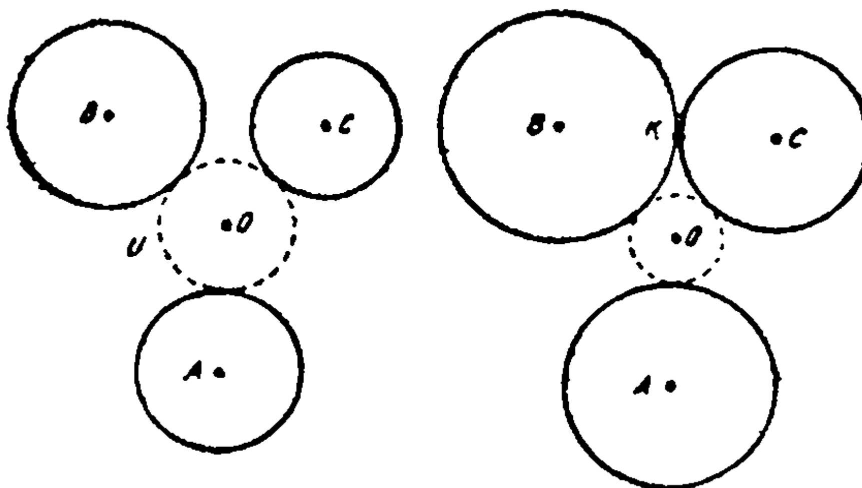


H.62. Biến đổi các đường tròn tiếp xúc thành những đường thẳng song song.

Ta xét một họ các đường tròn đi qua tâm nghịch đảo O và một điểm cố định A của mặt phẳng. Ta biết rằng (§ 4,2) họ này được biến đổi thành một họ các đường thẳng đi qua điểm A là ảnh của A. Đồng thời họ đường tròn trực giao với họ ban đầu sẽ được biến đổi thành một họ đường tròn trực giao với họ đường thẳng vừa nêu (trên H.61, các họ trực giao được biểu diễn bởi những đường chấm chấm). Về bề ngoài một họ đường thẳng đi qua cùng một điểm không giống một họ đường tròn, nhưng chúng lại có mối liên hệ với nhau chặt chẽ nhất — về quan điểm lý thuyết nghịch đảo thì chúng hoàn toàn tương đương.

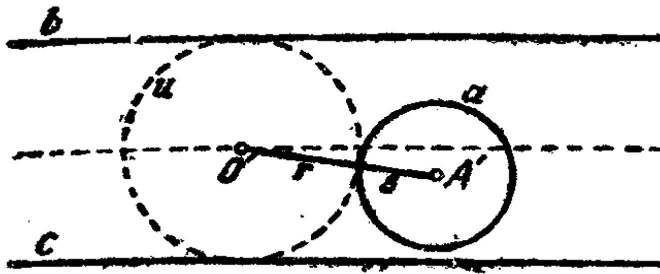
Đây là một thí dụ khác chứng tỏ phép nghịch đảo đã dẫn tới những kết quả gì. Giả thử cho trước một tập hợp đường tròn đi qua tâm nghịch đảo và có một tiếp tuyến chung tại điểm đó. Sau phép nghịch đảo, ta thu được một họ các đường thẳng song song. Thực vậy, vì các đường tròn đều đi qua điểm O, cho nên chúng được biến đổi thành những đường thẳng và, bởi vì các đường tròn không có giao điểm nào ngoài điểm O cho nên các đường thẳng thu được sẽ song song với nhau.

2. Áp dụng vào bài toán Apôlniut Lời giải hình học đơn giản sau đây của bài toán Apôlôniut là một minh họa đẹp đẽ cho ích lợi của lý thuyết nghịch đảo. Trong một phép nghịch đảo tâm tùy ý thì bài toán Apôlôniut đối với ba đường tròn cho trước sẽ được chuyển thành bài toán tương ứng đối với ba đường tròn khác: đề nghị bạn đọc suy nghĩ kỹ tại sao như vậy. Từ đó dễ nhận rằng nếu bài toán được giải với một bộ ba đường tròn nào đó thì bản thân nó có thể coi là giải được đối với mọi bộ ba đường tròn tùy ý suy ra từ bộ ba đầu tiên bằng phép nghịch đảo. Lợi dụng tình hình đó, trong tất cả các bộ ba «tương đương» có thể có được, ta chọn một bộ ba mà đối với nó bài toán được giải đặc biệt đơn giản. Để xác minh ta giả thiết ba đường tròn cho trước có tâm A, B, C không cắt nhau, mỗi đường tròn ở ngoài hai đường tròn kia



H.93. Chuẩn bị phép dựng giải bài toán Apôlôniut

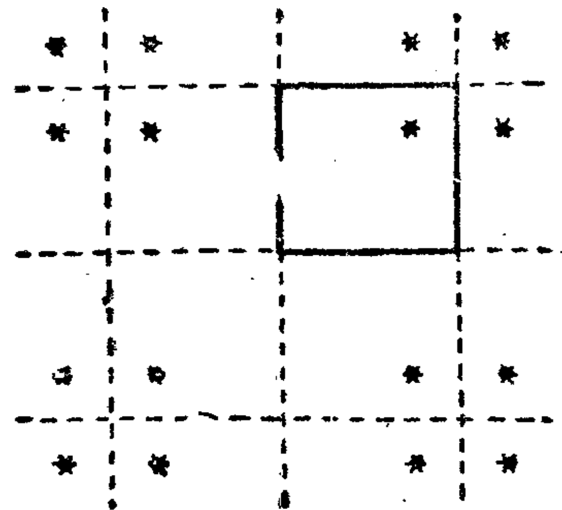
và cần tìm một đường tròn U tâm O bán kính P tiếp xúc ngoài với ba đường tròn đã cho. Ta lưu ý rằng nếu tăng bán kính của cả ba đường tròn một đại lượng d thì đường tròn tâm O bán kính P—d, tất nhiên sẽ là lời giải của bài toán đã biến đổi đi như vậy. Lợi dụng tình hình đó, ta tăng thêm bán kính các đường tròn



H. 64. Giải bài toán Apôlôniut

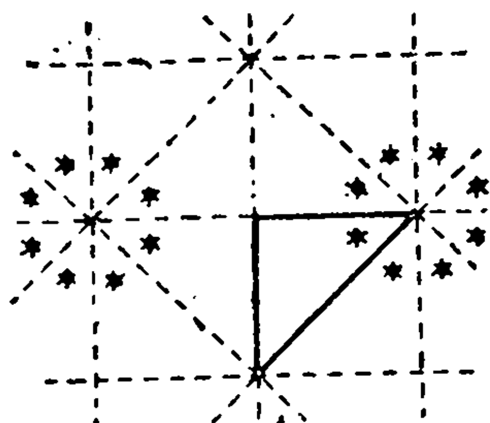
đã cho một đại lượng để cho hai trong ba đường tròn tiếp xúc với nhau ở một điểm nào đó ký hiệu là K (H.63). Sau đây ta thực hiện một phép nghịch đảo toàn bộ hình đối với đường tròn t bất kỳ tâm K. Các đường tròn tâm B và C biến thành các đường thẳng song song b và c, đường tròn thứ ba biến thành một đường tròn a nào đó (H.64). Ta đã có thể dựng được a,b,c bằng compa và thước kẻ. Đường tròn U phải tìm sẽ biến thành đường tròn u tiếp xúc với đường thẳng b,c và đường tròn a. Bán kính r của nó, tất nhiên phải bằng nửa khoảng cách giữa các đường thẳng b và c; tâm O của nó phải trùng với một trong các giao điểm của đường song song cách đều b,c với đường tròn đồng tâm với đường tròn a nhưng có bán kính lớn hơn một đoạn r. Chỉ còn phải áp dụng phép nghịch đảo ngược lại vào đường tròn u, ta sẽ được đường tròn Apôlôninut phải tìm.

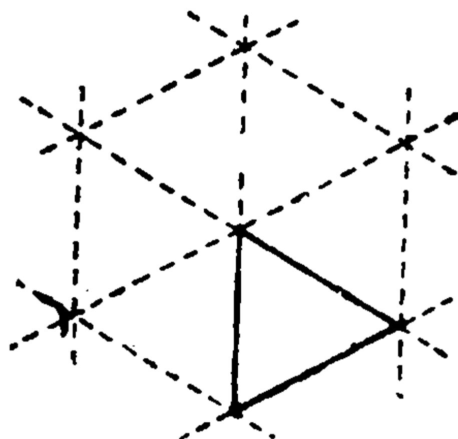
3. Các phép đối xứng lặp. Mỗi chúng ta ta chắc đã quan sát thấy những hiện tượng lạ xảy ra khi có nhiều gương. Nếu bốn



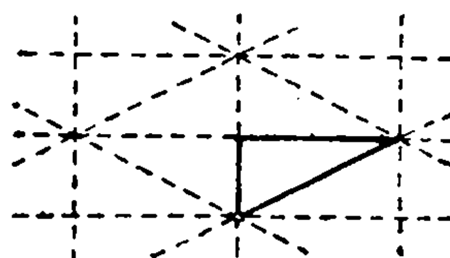
H. 65. Sự đối xứng lặp qua các bức tường thẳng đứng

bức tường của một căn buồng hình chữ nhật là các tấm gương lý tưởng, hoàn toàn không hấp thụ ánh sáng thì một điểm sáng ở trong căn buồng đó sẽ tạo ra một tập hợp vô số các phản xạ từ căn buồng này tới mỗi căn buồng sinh ra từ căn buồng đầu tiên bằng những phép đối xứng (H. 65) Với hình thức kết hợp các





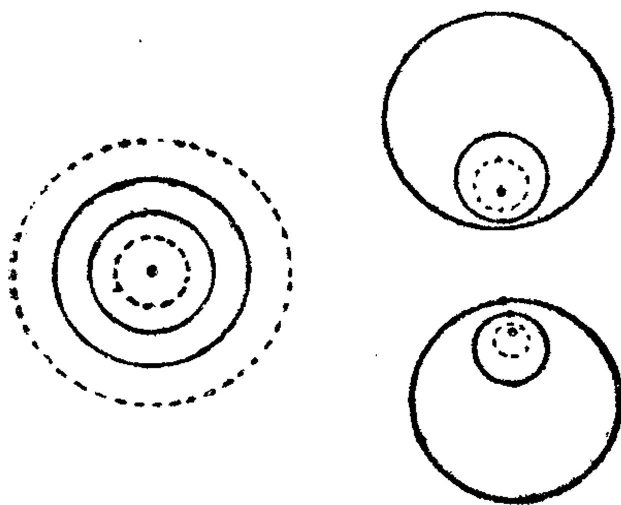
tấm gương không đều, chẳng hạn với ba gương thì một hệ thống phản xạ phức tạp hơn được tạo thành. Thế hình thu được chỉ dễ mô tả trong trường hợp các tam giác đã bị đối xứng không phủ lên nhau và phủ toàn bộ mặt phẳng. Chỉ có tam giác vuông cân, tam giác đều và tam giác vuông là nửa tam giác đều mới có tính chất như vậy (H. 66).



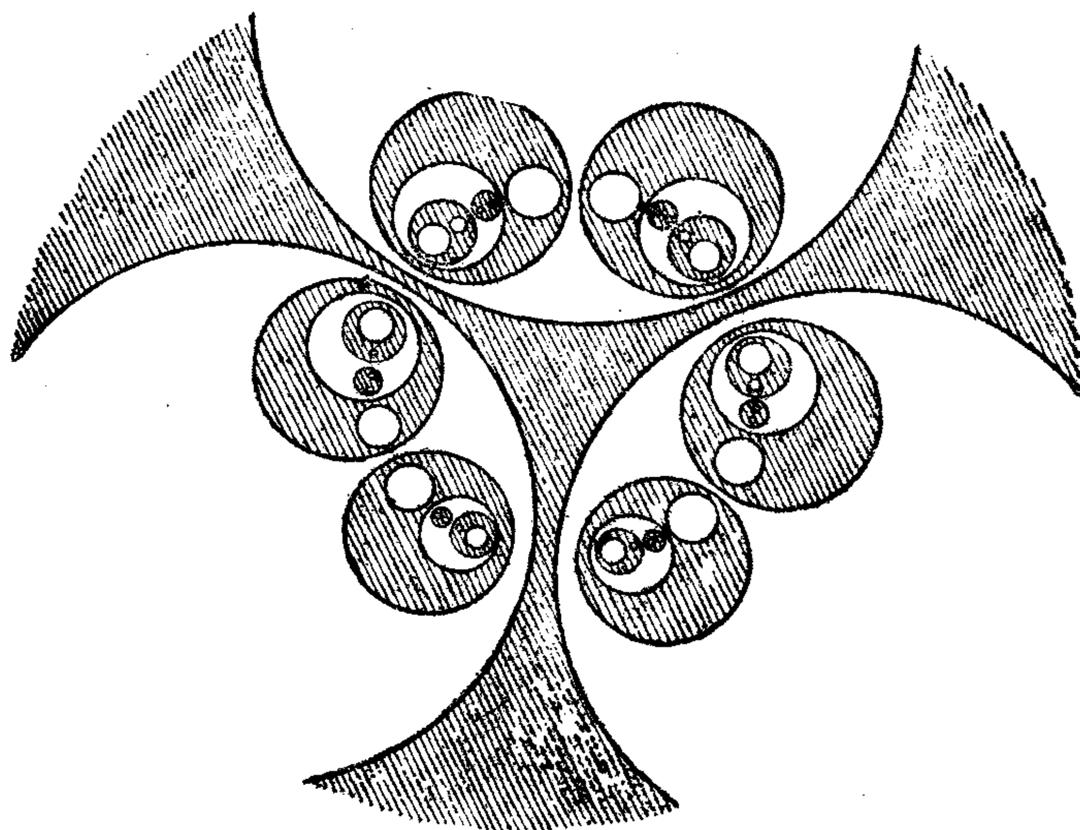
H. 66. Hệ thống gương tam giác đều

Còn xảy ra những tình huống kỳ lạ hơn nếu ta xét các phép nghịch đảo lặp đối với một cặp đường tròn. Đứng giữa hai gương cầu đồng tâm, ta phát hiện thấy tập hợp vô số các phản xạ đồng tâm. Một dãy các phản xạ 'này ra xa vô tận, một dãy khác lại tập

trung gần tâm. Trường hợp hai đường tròn ngoài nhau thì phức tạp hơn: các đường tròn và các phản xạ của chúng được phản xạ liên tiếp cái này vào cái kia, sau mỗi phản xạ sẽ nhỏ đi và co về hai điểm giới hạn theo mỗi đường tròn đã cho (những điểm này có tính chất nghịch đảo với nhau đối với đường tròn đã cho). Tất cả những điều ấy đã được chỉ ra trên H. 67. Bạn đọc có thể hình dung điều đã xảy ra trong trường hợp ba đường tròn nếu xem hình biểu thị trên H. 68.



H. 67. Sự đối xứng lặp qua hai gương cầu.



H. 68. Sự đối xứng qua ba gương cầu

CHƯƠNG IV

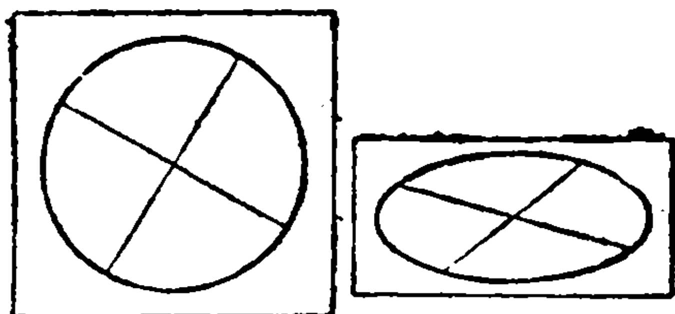
HÌNH HỌC XẠ ẢNH – TIÊN ĐỀ HỌC – HÌNH HỌC PHI ƠCLID

1. MỞ ĐẦU

1. Sự phân loại các tính chất hình học — Tính bất biến trong các biến đổi. Trong hình học, người ta nghiên cứu tính chất của các hình trong mặt phẳng và trong không gian. Những tính chất này nhiều và đa dạng đến nỗi cần phải có một nguyên tắc nào đó để sắp xếp tập hợp rộng lớn các tri thức thu thập được. Chẳng hạn, có thể chăng, chọn phương pháp đã được áp dụng trong khi rút ra các khẳng định làm cơ sở cho việc phân loại. Với quan điểm đó người ta thường phân biệt thành hai qui trình « tổng hợp » và « phân tích ». Các chứng minh tổng hợp liên quan chặt chẽ với phương pháp tiên đề cổ điển bắt nguồn từ Oclid : lập luận được xây dựng trên cơ sở hình học thuần túy, độc lập với các phương tiện đại số và với khái niệm continum số ; mọi định lý được suy ra một cách hình thức bằng con đường logic xuất phát từ một số các mệnh đề ban đầu nào đó được gọi là các tiên đề hoặc định đề. Một phương pháp khác có liên quan đến việc đưa vào hệ thống tọa độ bằng số và áp dụng các công cụ kỹ thuật của đại số. Phương pháp này gây ra những biến đổi sâu sắc trong bản thân khoa học toán học, gắn hình học giải tích và đại số thành một thể thống nhất,

Tuy nhiên, trong chương này ta quan tâm nhiều hơn đến sự phân loại về nội dung tức là về bản thân sự khẳng định các định lý chứ không phải về phương pháp chứng minh chúng. Trong hình học sơ cấp của mặt phẳng người ta phân biệt rõ hai nhóm định lý; một loại đề cập đến sự bằng nhau của các hình, về sự biến thiên của các đoạn thẳng và góc; một loại khác đề cập đến sự đồng dạng của các hình, đối với vấn đề này thì cái quan trọng là sự đo góc chứ không phải sự đo các đoạn thẳng. Sự khác biệt kể trên không quan trọng lắm, bởi vì độ dài các đoạn thẳng và độ lớn các góc có liên quan khá chặt chẽ với nhau, việc phân biệt chúng có ít nhiều giả tạo việc nghiên cứu những mối quan hệ này là đối tượng của lượng giác). Ta lưu ý đến một khía cạnh khác của vấn đề. Trong hình học sơ cấp, ta nghiên cứu *các đại lượng:* các đoạn thẳng, góc, diện tích, Hai hình được coi là tương đương nếu chúng là *toàn đẳng*, nghĩa là có thể biến đổi hình nọ thành hình kia nhờ phép dời hình — các biến đổi chỉ thay đổi vị trí của hình mà không thay đổi số đo của các đại lượng có liên quan với hình đó.. Một vấn đề nảy ra: giá trị các đại lượng và cùng với chúng tính toán đẳng hoặc tính đồng dạng của các hình phải chăng là một cái gì đó bất biến trong hình học? Hay là còn có những tính chất khác sâu sắc hơn của các hình hình học được giữ nguyên trong những biến đổi tổng quát hơn phép dời hình? Ta sẽ thấy rằng có những tính chất như vậy.

Ta hình dung trên một tấm bảng hình chữ nhật làm bằng vật liệu đàn hồi mềm có vẽ một hình tròn với hai đường kính vuông góc H. 69. Nếu ta đặt tấm bảng này vào một cái êtô và ép cho đến nửa chiều rộng



H.69. Sự co hình tròn.

ban đầu của nó thì đường tròn sẽ biến thành một elip và các đường kính sẽ không vuông góc với nhau nữa. Đường tròn có tính chất là mọi điểm của nó cách đều tâm, nhưng elip không có tính chất đó. Dường như sự nén đã hủy đi tất cả các tính chất hình học của hình ban đầu. Nhưng giả thiết đó còn xa sự thực: chẳng hạn, khẳng định về tâm chia đôi đường kính vẫn còn đúng cho cả đường tròn và elip; ở đây ta gặp một tính chất của hình được bảo toàn trong sự thay đổi khá rõ rệt về kích thước các yếu tố riêng biệt của hình đó. Chú ý vừa nêu gợi ý ta khả năng phân loại các định lý nói về một hình hình học nào đó tùy thuộc vào chúng còn hiệu lực hay mất hiệu lực trong phép co đều (hoặc dãn đều). Có thể đặt ra một vấn đề tổng quát hơn: xuất phát từ một lớp biến đổi hình cho trước nào đó (những lớp như vậy, chẳng hạn, có thể được sinh ra bởi tập hợp các phép dời hình hoặc phép co, các phép nghịch đảo tròn v.v.,.); cần nghiên cứu những tính chất của hình là bất biến khi hình đó chịu sự tác động của các phép biến đổi thuộc lớp đã cho. Hệ thống các định lý khẳng định những tính chất như thế hợp thành *hình học của lớp các biến đổi đang được xem xét*. Tư tưởng phân loại hình học theo các lớp biến đổi là của Phêlix Klêin (1849 — 1925) Tư tưởng này được phát biểu năm 1872 trong diễn văn nổi tiếng của ông, sau này được phổ biến rộng rãi dưới cái tên «Chương trình Eclanghen». Từ đó, tư tưởng này có ảnh hưởng quyết định đến chiều hướng của các nghiên cứu hình học.

Trong chương V, ta sẽ xác nhận một tình hình khá độc đáo là có một số tính chất nào đó của hình hình học ẩn sâu đến nỗi không mất đi sau những biến dạng hoàn toàn tùy ý. Chẳng hạn, các hình vẽ trên miếng cao su sẽ không mất đi những đặc điểm nào đó ngay trong những biến dạng mạnh nhất và khác nhau nhất. Tuy nhiên, trong chương này ta chỉ nghiên cứu các tính chất được bảo toàn, là « bất biến » trong một lớp các biến đổi đặc biệt nào đó rộng hơn lớp các phép dời hình nhưng hẹp hơn lớp các biến dạng tùy ý tổng quát nhất. Ta sẽ nói về lớp « các biến đổi xạ ảnh ».

2. Các biến đổi xạ ảnh. Bài toán *phối cảnh* đã được các họa sĩ (trong đó có Lêonard đơ Vanhxi và Albrext Đuyne) đề cập đến đã gợi ý các nhà toán học thời xưa nghiên cứu vấn đề này. Hình vẽ do họa sĩ tạo ra được xem như hình chiếu của vật mẫu trên mặt phẳng bức vẽ mà tâm chiếu là mắt của họa sĩ. Trong phép chiếu — tùy thuộc vào các vị trí khác nhau của các sự vật cần vẽ — thì độ dài đoạn thẳng và các góc không tránh khỏi phải chịu một sự thay đổi. Nhưng thường thường vẫn nhận ra được cấu trúc hình học của vật mẫu thông qua hình vẽ một cách dễ dàng. Giải thích tình hình này như thế nào? Không thể giải thích cách nào khác nếu như không chỉ ra được những tính chất hình học là « bất biến đối với phép chiếu ». Đó là những tính chất được bảo toàn trên hình vẽ, làm cho ta nhận ra được hình mẫu. Việc phát hiện và phân tích những tính chất này là đối tượng của hình học xạ ảnh. Hoàn toàn rõ ràng rằng trong lĩnh vực hình học này sẽ không chứa những khẳng định « dương tính » có liên quan đến độ dài các đoạn thẳng riêng biệt hoặc độ lớn các góc riêng biệt; nó không đề cập đến sự bằng nhau của các hình. Những sự kiện rời rạc có liên quan đến các tính chất xạ ảnh đã được biết đến từ thế kỷ XVIII, có khi từ rất xưa

như trường hợp « định lý Menelaux » chẳng hạn. Song mãi đến cuối thế kỷ XVIII, khi trường bách khoa nổi tiếng ở Pari mở ra một trang mới trong lịch sử toán học, đặc biệt trong hình học, mới thực sự có những công trình nghiên cứu có hệ thống trong lĩnh vực hình học xạ ảnh. Nhà trường này được cách mạng Pháp xây dựng nên đã đào tạo ra một số lớn sĩ quan phục vụ xuất sắc cho nước cộng hòa của họ. Trong số đó có Jăng Viktor Pôngxơliê (1788 – 1867) người đã viết bản « Luận văn về các tính chất xạ ảnh của các hình » khi bị bắt làm tù binh ở Nga.

Đến thế kỷ XIX, hình học xạ ảnh đã trở thành một trong những đối tượng được nghiên cứu nhiều trong toán học do ảnh hưởng của Stâyner, Staudt, Salơ và các nhà toán học khác. Tính phổ cập của hình học này, một phần là do tính hấp dẫn đặc biệt về thẩm mỹ của nó, một phần khác là do khả năng soi sáng khoa học hình học nói chung và có những liên hệ bên trong sâu sắc với hình học phi Ơclid và với đại số học.

§ 2. NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Nhóm các biến đổi xạ ảnh. Trước hết ta hãy xác định lớp hoặc « nhóm »[1] các phép biến đổi xạ ảnh. Giả thử cho trước hai mặt phẳng π và π' trong không gian,

(1) Thuật ngữ « nhóm » áp dụng vào nhóm các biến đổi có nghĩa là sự thực hiện liên tiếp hai biến đổi của lớp đang xét cũng là một biến đổi của lớp đó và một biến đổi « nghịch đảo » với một biến đổi của lớp đang xét cũng thuộc lớp đó. Các tính chất nhóm của các phép toán đã và đang tiếp tục giữ vai trò rất lớn trong nhiều lĩnh vực, tuy nhiên đối với hình học thì ý nghĩa của khái niệm « nhóm » ở đây có thể là đã được cường điệu lên đôi chút.

song song hoặc không song song với nhau. Ta thực hiện một *phép chiếu xuyên tâm* π trên π' với tâm O cho trước không nằm trên π và π', cho ứng với mỗi điểm P của mặt phẳng π một điểm P' của mặt phẳng π' sao cho P và P' nằm trên cùng một đường thẳng đi qua O. Tương tự, ta sẽ thực hiện một *phép chiếu song song* nếu giả thiết các đường thẳng chiếu song song với nhau. Cũng làm như vậy ta sẽ định nghĩa được phép chiếu của một đường thẳng hoặc của một đường cong l trong mặt phẳng π lên một đường l' nào đó của mặt phẳng π', trong đó phép chiếu có thể là xuyên tâm hoặc song song.

Mọi ánh xạ của một hình lên một hình khác thu được bằng phép chiếu (xuyên tâm hoặc song song) hoặc bằng một dãy hữu hạn các phép chiếu như vậy, được gọi là một *biến đổi xạ ảnh*[2]. *Hình học xạ ảnh* của mặt phẳng gồm một hệ thống các định lý hình học được bảo toàn trong các biến đổi xạ ảnh bất kỳ các hình tương ứng. Hình học xạ ảnh khác hẳn với *hình học mêtric* là một hình học bao gồm hệ thống các định lý xác lập mối liên hệ giữa các đại lượng trong các hình được xét chỉ là bất biến đối với lớp các phép dời hình. Có thể phát biểu trực tiếp vài tính chất xạ ảnh. Một điểm được chiếu thành một điểm. Hơn nữa, *một đường thẳng cũng được chiếu thành một đường thẳng*; quả vậy, nếu chiếu đường thẳng l trong mặt phẳng π lên mặt phẳng π' thì giao tuyến l' của mặt phẳng π' với mặt phẳng đi qua

---

(1) Nếu hai hình chỉ liên hệ với nhau bằng một phép chiếu thì ta thường nói rằng chúng phối cảnh với nhau. Bởi thế, nếu ta nói hình F biến thành hình F' sau biến đổi xạ ảnh thì điều này có nghĩa là F và F' phối cảnh với nhau hoặc, có thể chỉ ra một dãy các hình F, F_1, F_2,..., F_n, F' sao cho bất kỳ hai hình đứng liền nhau đều phối cảnh với nhau.

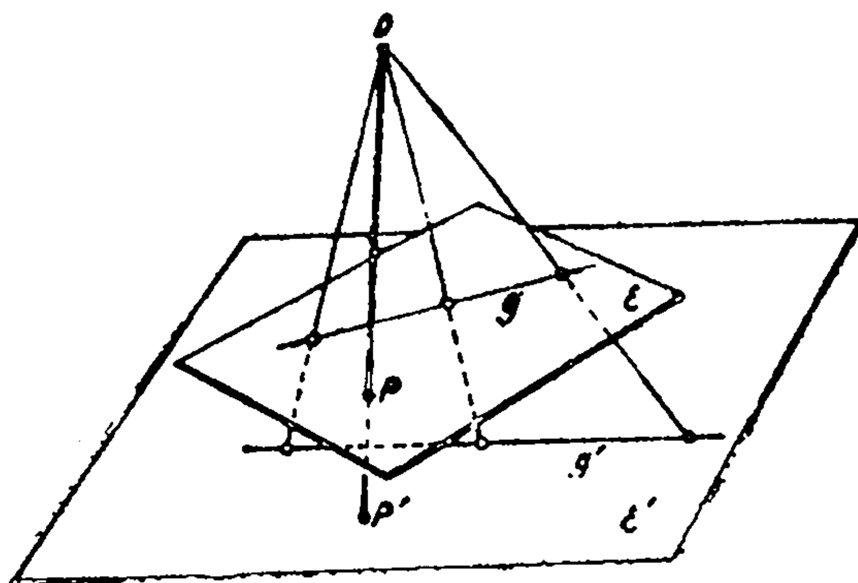
O và l phải là một đường thẳng[1]. Nếu điểm A và đường thẳng l là liên thuộc[2] thì điểm A' là đường thẳng l' là ảnh của chúng sau biến đổi xạ ảnh cũng là liên thuộc. Nói cách khác, *tính liên thuộc của một điểm và một đường thẳng là một tính chất bất biến đối với nhóm các biến đổi xạ ảnh.* Từ sự kiện này suy ra một loạt các hệ quả đơn giản nhưng rất quan trọng. Nếu ba điểm (hoặc nhiều hơn ba) là *cộng tuyến*, tức là liên thuộc với cùng một đường thẳng thì các ảnh của chúng cũng cộng tuyến. Tương tự, nếu ba đường thẳng trong mặt phẳng *đồng qui* tức là liên thuộc với cùng một điểm thì ảnh của chúng cũng là những đường thẳng đồng qui. Trong khi các tính chất đơn giản — tính liên thuộc, sự cộng tuyến, sự đồng qui — là những *tính chất xạ ảnh* (tức là những tính chất bất biến đối với các biến đổi xạ ảnh) thì nói chung số đo các đoạn thẳng và góc cũng như tỉ số các đại lượng đó sẽ thay đổi trong biến đổi xạ ảnh. Chẳng hạn, tam giác cân hoặc đều có thể được chiếu thành tam giác có cạnh không bằng nhau. Từ đó suy ra khái niệm « tam giác » thuộc về hình học xạ ảnh ; khái niệm « tam giác đều » không thuộc về hình học đó mà chỉ thuộc về hình học mêtric.

2. Định lý Đêdac. Định lý Đêdac (1593 — 1662) là một trong những phát minh sớm nhất trong lĩnh vực hình học xạ ảnh : trên một mặt phẳng, nếu hai tam giác ABC và A'B'C' ở vị trí sao cho các đường thẳng nối các đỉnh

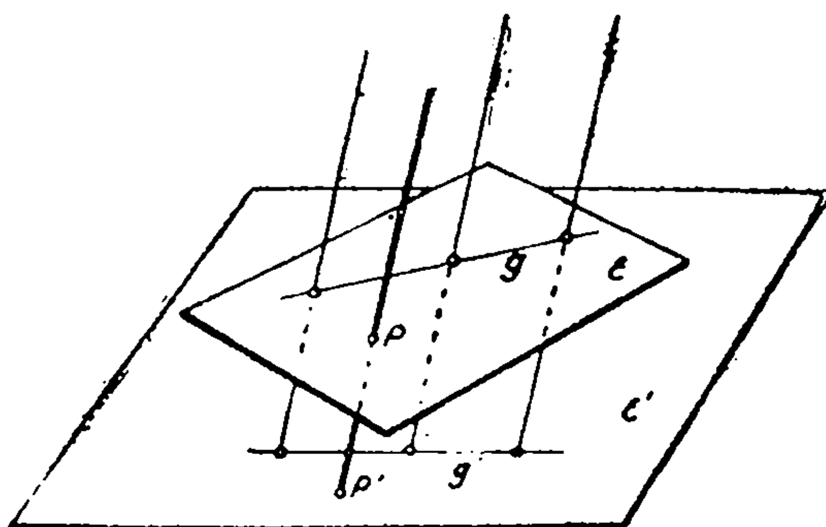
---

(1) Trừ trường hợp đường thẳng OP (hoặc mặt phẳng đi qua O và l) song song với mặt phẳng π. Ngoại lệ này sẽ được xóa bỏ trong §4.

(2) Điểm và đường thẳng gọi là liên thuộc nếu đường thẳng đi qua điểm hoặc điểm nằm trên đường thẳng. Thuật ngữ « trung tính » này nhấn mạnh tính tương hỗ của quan hệ đang xét.

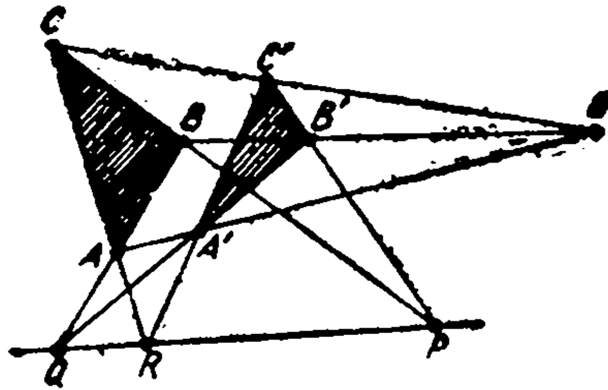


H. 70. Phép chiếu xuyên tâm



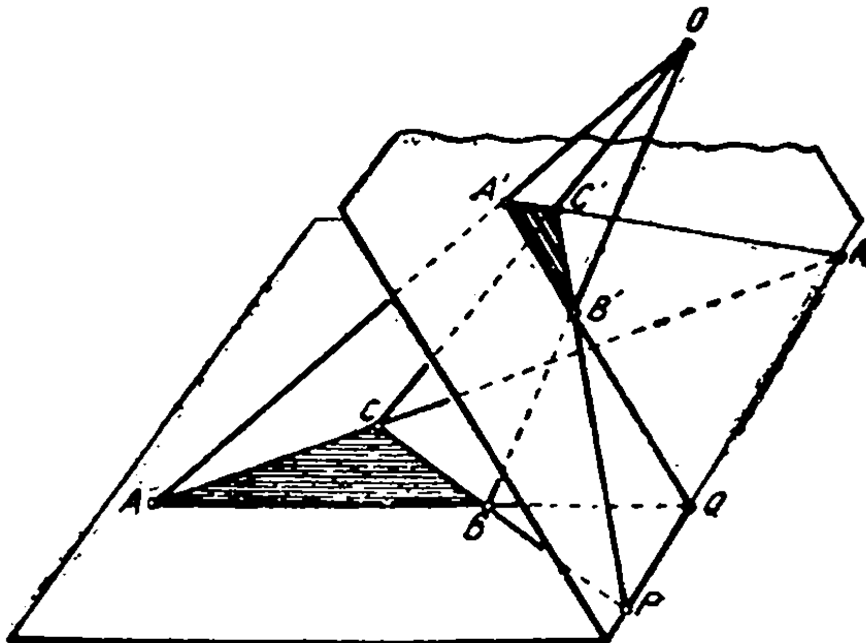
H. 71. Phép chiếu song song

tương ứng đồng qui thì ba giao điểm của các cạnh tương ứng kéo dài sẽ cộng tuyến. Định lý được thể hiện trên hình vẽ (H.72), đề nghị bạn đọc thử nghiệm lại định lý này trên các hình vẽ khác. Chứng minh của định lý không phải là tầm thường mặc dầu hình vẽ rất đơn giản chỉ gồm có các đường thẳng. Định lý rõ ràng thuộc về hình học xạ ảnh bởi vì trong phép chiếu thì, hình vẽ đang xét sẽ không mất các tính chất đã nêu



H. 72. Định lý Đêdac trong mặt phẳng

trong định lý. Ta còn trở lại định lý này một lần nữa. Ở đây, chúng tôi muốn lưu ý bạn đọc một tình hình đặc biệt là định lý Đêdac cũng đúng khi các tam giác được xét nằm trong hai mặt phẳng khác nhau (không song song) và định lý Đêdac « ba chiều » hoặc « không gian » được chứng minh dễ dàng. Theo giả thiết, các đường thẳng AA', BB' và CC' cắt nhau ở điểm O (H.73).



H. 73. Định lý Đêdac trong không gian

Như vậy, các đường thẳng AB và A'B' nằm trên một mặt phẳng, do đó chúng cắt nhau ở một điểm R nào

đó; cũng vậy, giả thử AC và A'C' cắt nhau ở điểm Q, BC và B'C' cắt nhau ở điểm P. Vì các điểm P, Q, R nằm trên các cạnh kéo dài của các tam giác ABC và A'B'C' cho nên chúng nằm trong mặt phẳng của mỗi tam giác. Do đó, ba điểm P, Q, R nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng đã cho; có nghĩa là chúng cộng tuyến và điều đòi hỏi đã được chứng minh.

Chứng minh đơn giản này gợi cho ta ý định cố gắng chứng minh định lý Đêdac « hai chiều » nhờ sự chuyển qua giới hạn, từ từ nén toàn bộ hình vẽ không gian sao cho hai mặt phẳng đến trùng nhau trong đó có cả điểm O. Song, việc chuyển qua giới hạn này không đơn giản, bởi vì giao tuyến PQR sẽ không được xác định một cách đơn trị khi hai mặt phẳng trùng nhau. Tuy nhiên hình vẽ trên H. 72 có thể xem như hình phối cảnh của hình không gian trên H.73 và vẫn có thể lợi dụng tình hình này trong khi chứng minh định lý « phẳng ».

Có sự khác biệt quan trọng giữa định lý Đêdac trên mặt phẳng và trong không gian. Chứng minh trường hợp ba chiều chỉ dựa trên những kiến thức hình học có liên quan đến tính liên thuộc của các điểm, các đường thẳng và các mặt phẳng. Có thể chứng tỏ rằng chứng minh của định lý hai chiều — *với yêu cầu không vượt ra khỏi một mặt phẳng cho trước* — tất yếu phải dựa trên những tính chất nào đó của các hình đồng dạng đã không còn thuộc về hình học xạ ảnh mà thuộc về hình học mêtric.

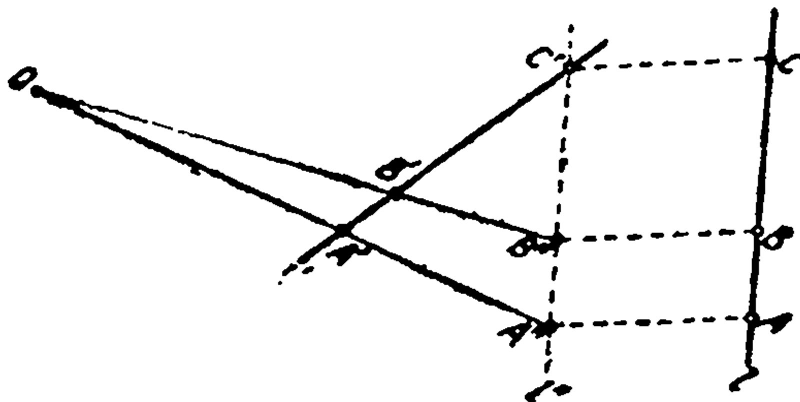
Định lý đảo của định lý Đêdac khẳng định rằng nếu ba giao điểm của các cạnh tương ứng cộng tuyến thì các đường thẳng nối các đỉnh tương ứng sẽ đồng quy. Chứng minh của định lý này trong trường hợp các tam giác nằm trên những mặt phẳng không song song được dành cho bạn đọc tự thực hiện để luyện tập.

§ 3. TỶ SỐ KÉP

1. Định nghĩa và chứng minh tính bất biến. Nếu như độ dài của một đoạn thẳng chính là cái chìa khóa của hình học mêtric thì trong hình học xạ ảnh cũng có một khái niệm cơ bản nhờ đó có thể biểu thị mọi tính chất xạ ảnh khác nhau của các hình.

Giả thử ba điểm A, B và C nằm trên một đường thẳng. Nói chung thì một phép chiếu không những chỉ làm thay đổi các khoảng cách AB và BC mà làm thay đổi cả tỷ số $\frac{AB}{BC}$ của chúng.

Thực vậy, ba điểm A, B, C *bất kỳ* trên đường thẳng l có thể được biến đổi thành ba điểm *bất kỳ* A', B', C' trên đường thẳng l' bằng hai phép chiếu liên tiếp. Muốn thấy rõ điều này, ta quay đường thẳng l' quanh điểm C' đến vị trí l'' song song với l (H. 74). Sau đó, bằng cách chiếu l xuống l'' theo phương song song với CC' ta được ba điểm A'', B'' và C'' (= C'). Các đường thẳng A'A'' và B'B'' cắt nhau ở O mà ta sẽ chọn làm



H. 74

tâm của phép chiếu thứ hai. Hai phép chiếu thực hiện liên tiếp nói trên sẽ cho ta kết quả cần thiết[1].

Từ điều đã chứng minh suy ra không thể có một đại lượng nào được xác định chỉ bằng ba điểm trên một đường thẳng là bất biến trong phép chiếu. Nhưng trong đó có bao hàm một phát minh chủ yếu trong hình học xạ ảnh — nếu *bốn* điểm A, B, C, D cho trước cùng nằm trên một đường thẳng biến thành những điểm A', B', C', D' của một đường thẳng khác trong phép chiếu thì đại lượng gọi là *tỉ số kép* của bốn điểm đó sẽ không thay đổi giá trị trong phép chiếu. Ở đây có bao hàm một tính chất toán học của hệ bốn điểm trên đường thẳng có tên gọi là tính chất bất biến, tính chất này có thể phát hiện thấy trong mọi phép chiếu của đường thẳng đang xét. Tỉ số kép không phải là khoảng cách, cũng không phải là tỉ số các khoảng cách mà là *tỉ số của hai tỉ số như vậy*: nếu ta lập các tỉ số $\frac{CA}{CB}$ và $\frac{DA}{DB}$ thì tỉ số của chúng $x = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ là tỉ số kép của bốn điểm A, B, C, D, lấy theo thứ tự đã nêu ở trên.

Bây giờ, ta sẽ chứng tỏ rằng tỉ số kép của bốn điểm là bất biến trong phép chiếu, tức là nếu A, B, C, D, và A', B', C', D' là hai bộ bốn điểm trên hai đường thẳng và giữa chúng có một tương ứng xạ ảnh thì có đẳng thức

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'}$$

Chứng minh là hoàn toàn sơ cấp. Ta nhớ rằng diện tích của tam giác bằng nửa tích của cạnh đáy với chiều

---

(1) Các bạn nghĩ xem phải làm gì nếu các đường thẳng A'A'' và B' B'' song song với nhau.

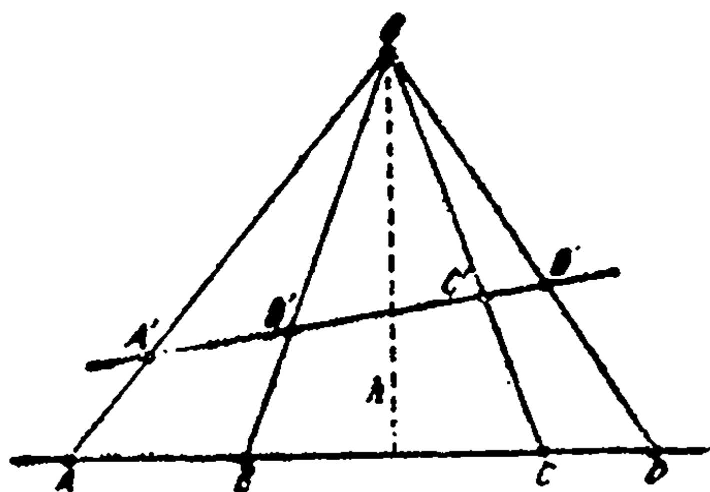
cao; mặt khác nó cũng bằng nửa tích của hai cạnh với sin của góc xen giữa hai cạnh đó. Khi đó ta được (H.75):

$$\text{diện tích } OCA = \frac{1}{2} h.CA = \frac{1}{2} OA.OC \sin \widehat{COA}$$

$$\text{diện tích } OCB = \frac{1}{2} h.CB = \frac{1}{2} OB.OC \sin \widehat{COB},$$

$$\text{diện tích } ODA = \frac{1}{2} h.DA = \frac{1}{2} OA.OD \sin \widehat{DOA},$$

$$\text{diện tích } ODB = \frac{1}{2} h.DB = \frac{1}{2} OB.OD \sin \widehat{DOB}$$



H. 75. Tính bất biến của tỉ số kép

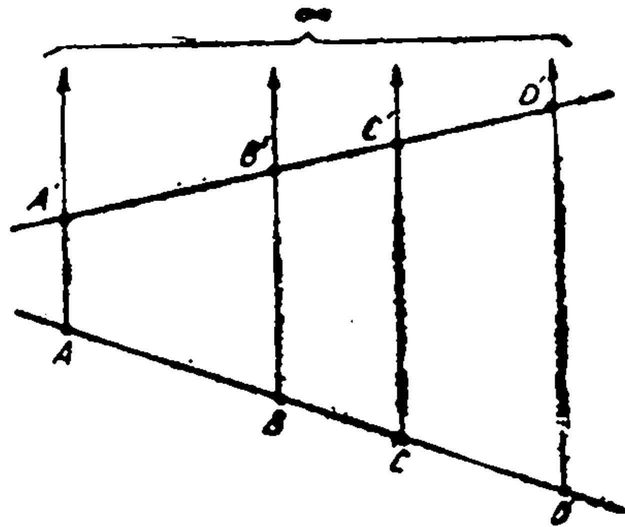
Từ đó:

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DB}{DA} = \frac{OA.OC \sin \widehat{COA}}{OB.OC \sin \widehat{COB}}$$

$$\cdot \frac{OB.OD \sin \widehat{DOB}}{OA.OD \sin \widehat{DOA}} = \frac{\sin \widehat{COA} . \sin \widehat{DOB}}{\sin \widehat{COB} . \sin \widehat{DOA}}$$

Như vậy, tỉ số kép của bốn điểm A, B, C, D chỉ phụ thuộc vào các góc tạo bởi các đoạn thẳng OA, OB, OC, OD tại điểm O. Vì những góc này không thay đổi với mọi bộ bốn điểm A', B', C', D' do A, B, C, D biến thành trong phép chiếu cho nên rõ ràng tỉ số kép không thay đổi trong phép chiếu.

Tính chất tỉ số kép không thay đổi trong phép chiếu *song song* được suy ra từ các tính chất sơ cấp của các tam giác đồng dạng. Đề nghị bạn đọc tự chứng minh để luyện tập (H. 76).

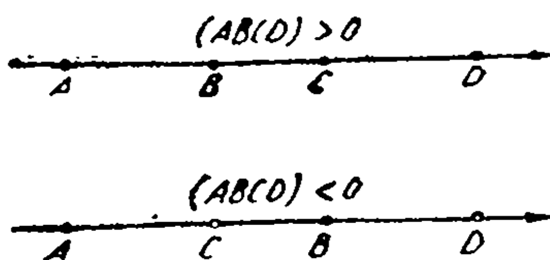


H. 76. Tính bất biến của tỉ số kép trong phép chiếu song song

Cho đến nay, khi nói về tỉ số kép của bốn điểm A, B, C, D trên đường thẳng l, ta đã giả thiết tỉ số này gồm các đoạn dương. Nên biến đổi định nghĩa này như sau. Ta chọn một trong hai hướng của đường thẳng l làm hướng dương và qui ước rằng mọi đoạn thẳng tính theo hướng đó được coi là số dương còn những đoạn thẳng tính theo hướng ngược lại là các số âm. Bây giờ ta sẽ định nghĩa tỉ số kép của các điểm A, B, C, D (lấy theo thứ tự đó) theo công thức

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

trong đó dấu của các số CA, CB, DA, DB được chọn theo các điều kiện đã nêu ở trên. Bởi vì, khi thay đổi hướng trên đường thẳng l thì ta chỉ thay đổi dấu của cả bốn đoạn thẳng, cho nên giá trị (ABCD) không phụ thuộc vào sự chọn hướng. Dễ nhận thấy rằng (ABCD) có dấu âm hoặc dấu dương tùy theo cặp điểm A, B có gián cách cặp điểm C, D hay không. Vì tính chất « bị gián cách » là bất biến đối với phép chiếu cho nên tỉ



H. 77. Dấu của tỉ số kép

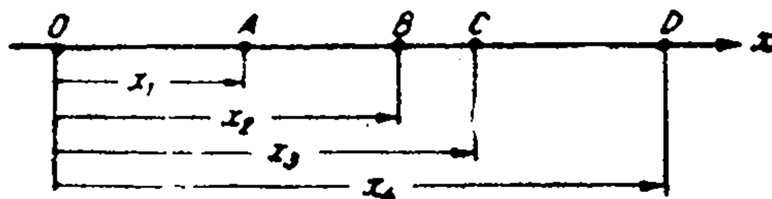
số kép (ABCD) được hiểu theo nghĩa mới (như là một đại lượng có dấu) cũng bất biến. Ta chọn một điểm gốc O trên đường thẳng l và cho ứng với mỗi điểm của đường thẳng l khoảng cách từ điểm đó đến gốc O với dấu thích hợp gọi là tọa độ x của nó; như vậy, nếu biểu thị tọa độ của A, B, C, D theo thứ tự là x_1, x_2, x_3 x_4 thì ta có công thức:

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} =$$

$$= \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x_4 - x_2}{x_4 - x_1}$$

Nếu (ABCD) = —1 tức là $\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$ thì các điểm C và D chia trong và chia ngoài đoạn AB theo cùng một tỉ số. Trong trường hợp này ta nói rằng C và D chia điều hòa đoạn AB và mỗi điểm C và D được coi là liên hợp điều hòa của điểm kia đối với cặp điểm A, B. Nếu (ABCD) = 1 thì các điểm C và D (hoặc A và B) trùng nhau.

Cần lưu ý rằng khi định nghĩa tỉ số kép (ABCD) thì thứ tự chọn các điểm A, B, C, D có một vai trò quan trọng. Chẳng hạn, nếu (ABCD) = λ thì tỉ số kép (BACD)



H. 78. Biểu thức tọa độ của tỉ số kép.

sẽ bằng $1/\lambda$, trong khi đó thì $(DACB) = 1 - \lambda$; bạn đọc có thể tự chứng minh điều này không khó khăn gì. Bốn điểm A, B, C, D có thể hoán vị cho nhau bằng $4.3.2.1 = 24$ cách khác nhau, mỗi hoán vị tương ứng với một giá trị của tỉ số kép; chẳng hạn $(ABCD) = (BADC)$. Để luyện tập, chúng tôi dành cho bạn đọc chứng minh trong 24 hoán vị có thể của bốn điểm, chỉ có sáu giá trị khác nhau của tỉ số kép, đó là:

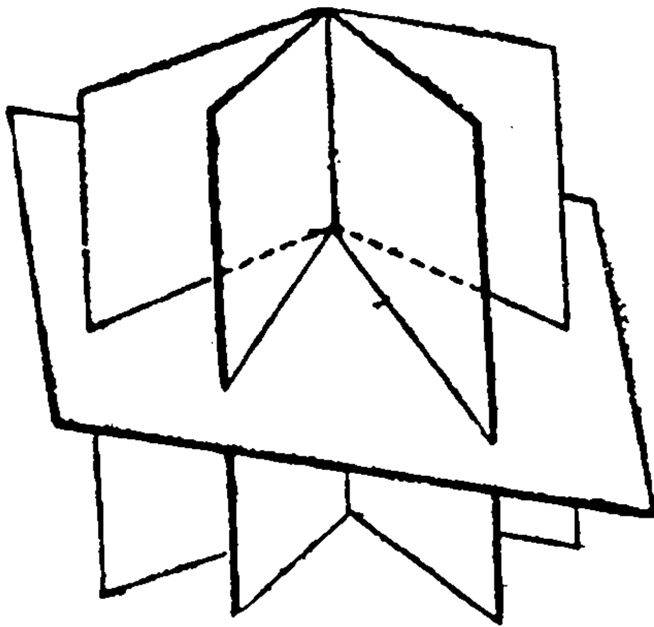
$$\lambda,\ 1-\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ \frac{\lambda-1}{\lambda},\ \frac{1}{1-\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

Sáu đại lượng này, nói chung thì khác nhau, nhưng với một số giá trị của λ thì có thể có hai đại lượng trùng nhau; chẳng hạn, với $\lambda = -1$ trong trường hợp chia điều hòa.

Ta cũng có thể định nghĩa *tỉ số kép của bốn đường thẳng 1, 2, 3, 4 đồng phẳng và đồng qui* là tỉ số kép của bốn giao điểm của các đường thẳng đó với một đường thẳng nào đó cùng nằm trong mặt phẳng. Vị trí của năm đường thẳng này là không quan trọng do tính bất biến của tỉ số kép trong phép chiếu. Tương đương với định nghĩa đó là định nghĩa sau đây:

$$(1, 2, 3\ 4) = \pm \frac{\sin(1, 3)}{\sin(2, 3)} : \frac{\sin(1, 4)}{\sin(2, 4)},$$

phải lấy dấu (+) nếu cặp đường thẳng 1, 2 không bị gián cách bởi cặp 3, 4; phải lấy dấu (—) nếu chúng bị gián cách (trong công thức trên thì (1, 3) chẳng hạn, biểu thị góc giữa các đường thẳng 1 và 3). Cuối cùng, có thể định nghĩa tỉ số kép của bốn *mặt phẳng đồng trục* (bốn mặt phẳng cắt nhau theo một đường thẳng hoặc «trục»). Nếu một đường thẳng nào đó cắt các



H, 79. Tỉ số kép của bốn mặt phẳng đồng trục.

mặt phẳng tại 4 điểm thì tỉ số kép của những điểm đó bao giờ cũng có một giá trị không phụ thuộc vào việc chọn đường thẳng (đề nghị bạn đọc chứng minh để luyện tập). Bởi thế có thể gọi giá trị thu được là tỉ số kép của bốn mặt phẳng đang xét. Nói cách khác, có thể gọi tỉ số kép của bốn mặt phẳng đồng trục là tỉ số kép của bốn giao tuyến của chúng với một mặt phẳng thứ năm bất kỳ (H. 79).

Khái niệm tỉ số kép của bốn mặt phẳng gợi ý ta nêu vấn đề: liệu có thể định nghĩa biến đổi xạ ảnh của không gian ba chiều lên chính không gian đó hay không. Tất nhiên, định nghĩa bằng phép chiếu xuyên tâm không mở rộng được một cách trực tiếp từ trường hợp hai chiều đến trường hợp ba chiều. Nhưng có thể chứng minh rằng, mỗi biến đổi liên tục của mặt phẳng lên chính nó biến đổi các điểm thành các điểm và các đường thẳng thành các đường thẳng một cách đơn trị hai chiều là một biến đổi xạ ảnh. Tình hình đó đã gợi ý cho ta đưa ra định nghĩa sau đây đối với trường hợp ba chiều: một biến đổi xạ ảnh của không gian là một biến đổi liên tục đơn trị hai chiều biến các đường thẳng thành các đường thẳng. Có thể chứng minh các biến đổi như vậy bảo toàn tỉ số kép.

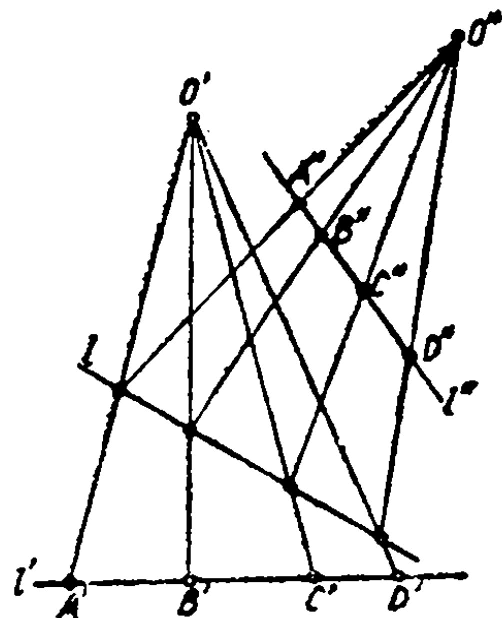
Ta bổ sung thêm một số chú ý nữa. Giả sử cho ba điểm A, B, C có tọa độ x_1, x_2, x_3. Cần tìm điểm thứ tư D sao cho (ABCD) = λ (λ cho trước). Nói chung, bài toán có và chỉ có một lời giải (trường hợp đặc biệt $\lambda = -1$, bài toán qui về việc dựng điểm điều hòa thứ tư, sẽ được xét tỉ mỉ trong mục tiếp sau). Thực vậy, nếu x là tọa độ của điểm D phải tìm thì phương trình:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x - x_2}{x - x_1} = \lambda$$

có đúng một nghiệm. Cho rằng x_1, x_2, x_3 là cho trước và để cho gọn, đặt $\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = k$ ta được nghiệm có dạng $x = \frac{kx_2 - \lambda x_1}{k - \lambda}$. Chẳng hạn, nếu các điểm A,B,C cách đều nhau và có tọa độ theo thứ tự $x_1 = 0$, $x_2 = d$; $x_3 = 2d$ thì

$$k = \frac{2d - 0}{2d - d} = 2 \text{ và } x = \frac{2d}{2 - \lambda}.$$

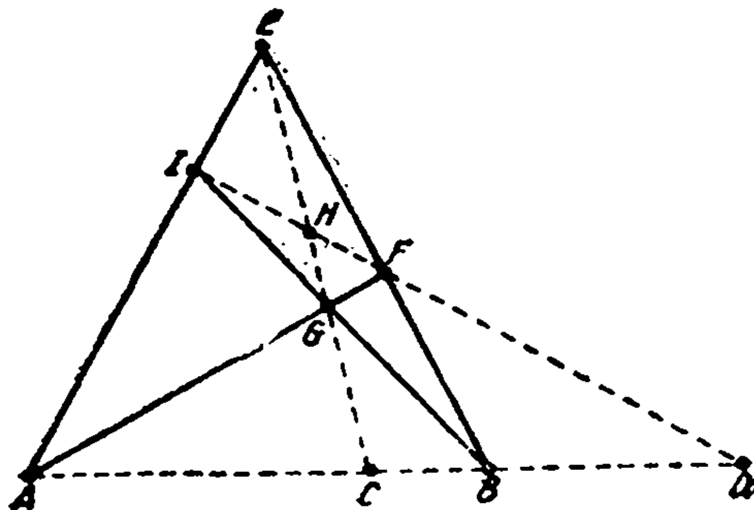
Nếu đường thẳng l được chiếu từ hai tâm khác nhau O' và O'' lên hai đường thẳng l' và l'' khác nhau thì ta sẽ được một tương ứng P ↔ P' giữa các điểm của các đường thẳng l và l' và một tương ứng P ↔ P'' giữa các điểm của các đường thẳng l và l''. Những tương ứng đó quy định ra một tương ứng P' ↔ P'' giữa các điểm của các đường thẳng l' và l'' sao cho mỗi bộ bốn điểm A', B', C', D' có cùng một tỉ số kép với bộ bốn



H.80. Tương ứng xạ ảnh giữa các điểm của hai đường thẳng

điềm tương ứng A'', B'', C'', D'' trên l''. Mọi tương ứng một — một giữa các điềm của hai đường thẳng có tính chất đó được gọi là *một tương ứng xạ ảnh*, không phụ thuộc vào phương pháp xác định tương ứng đó.

2. Áp dụng vào tứ giác toàn phần. Với tư cách một ứng dụng của tính bất biến của tỉ số kép, ta sẽ chứng minh một định lý tuy đơn giản nhưng quan trọng của hình học xạ ảnh. Ta xét *tứ giác toàn phần* là hình hợp bởi bốn đường thẳng bất kỳ trong đó không có ba đường nào đồng quy và sáu giao điềm của chúng. Trên H. 81 bốn đường thẳng đó là AE, BE, BI, AF. Các đường thẳng AB, EG và IF là các *đường chéo* của tứ giác.



H.81 Tứ giác toàn phần.

Ta xét một đường chéo (AB chẳng hạn) và lấy các giao điềm C và D của nó với hai đường chéo khác. Định lý khẳng định sự tồn tại của đẳng thức (ABCD) = —1; điều này được diễn đạt bằng lời như sau: *các giao điềm của một đường chéo với hai đường chéo kia sẽ chia điều hòa đoạn nối các đỉnh của tứ giác*. Muốn chứng minh, ta chỉ cần lưu ý rằng:

$$x = (ABCD) = (IFHD) \qquad \text{(chiếu từ E)}$$
$$(IFHD) = (BACD) \qquad \text{(chiếu từ G)}$$

Ta đã biết: $(BACD) = \dfrac{1}{(ABCD)}$; bởi thế $x = \dfrac{1}{x}$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$. Nhưng vì C, D gián cách A, B cho nên tỉ số kép x âm, do đó nó phải bằng —1.

Tính chất đặc biệt của tứ giác toàn phần vừa thu được giúp ta dựng điểm liên hợp điều hòa với điểm C đối với cặp A, B (nếu A, B, C cộng tuyến) chỉ bằng thước kẻ. Chỉ cần chọn một điểm E bất kỳ ở ngoài đường thẳng đã cho rồi vẽ các đường thẳng EA, EB, EC; sau đó lấy điểm G tùy ý trên EC rồi vẽ các đường thẳng AD và BD cắt EB và EA ở các điểm F và I; sau cùng vẽ đường thẳng IF cho cắt đường thẳng ban đầu ở điểm D phải tìm.

§4. SỰ SONG SONG VÀ SỰ VÔ HẠN

1. Những điểm xa vô tận «lý tưởng». Sự xem xét kỹ lưỡng những điều đã trình bày trong mục trước cho ta thấy rằng trong nhiều trường hợp, những luận cứ đưa ra sẽ mất hiệu lực nếu những đường thẳng mà giao điểm phải dựng của chúng song song với nhau. Chẳng hạn, phép dựng điểm điều hòa thứ tư D sẽ không thực hiện được nếu đường thẳng IF song song với AB. Các lập luận hình học ở mỗi bước sẽ phức tạp thêm do các đường song song không có điểm chung, mỗi lần nói đến giao điểm của các đường thẳng lại phải xét riêng trường hợp song song. Mặt khác, ta buộc phải phân biệt và giải thích phép chiếu song song bên cạnh phép chiếu xuyên tâm. Nếu không thoát ra khỏi tình trạng đó thì hình học xạ ảnh tất sẽ không tránh khỏi cực kỳ phức tạp do phải nghiên cứu một cách chi tiết các ngoại lệ và trường hợp riêng.



Hình 82. Vẽ đường thẳng qua chướng ngại vật.

Điều đó giúp ta tìm ra lối thoát theo hướng khác, cụ thể là theo con đường *khái quát hóa các khái niệm cơ bản để xóa bỏ được những ngoại lệ có thể có.*

Một minh họa hình học sẽ giúp ta. Ta thấy rằng nếu một đường thẳng cắt một đường thẳng khác đang quay dần tới vị trí song song thì giao điểm của hai đường thẳng sẽ ra xa vô tận. Điều này đưa ta đến một khẳng định ngây thơ: hai đường thẳng cắt nhau « ở một điểm xa vô tận ». Cần phải gán cho cách diễn đạt kiểu trên một ý nghĩa chính xác để có thể tiến hành các lập luận đối với những điểm « xa vô tận » hoặc còn gọi là những điểm « lý tưởng » cũng tin cậy và chính xác như những lập luận đối với các điểm thông thường trong mặt phẳng hoặc trong không gian. Nói cách khác, chúng ta muốn mọi qui tắc xử lý các điểm, các đường thẳng, các mặt phẳng vẫn có hiệu lực đối với các yếu tố của hình học « lý tưởng ». Về ý nghĩa toán học thì sự tồn tại « các điểm xa vô tận » sẽ được bảo đảm nếu các tính chất toán học của những yếu tố mới đưa vào đó, tức là quan hệ tương hỗ của chúng với nhau và với các điểm « thông thường » là rõ ràng và không có sự mâu thuẫn lẫn nhau. Thông thường, một hệ tiên đề hình học (trong hình học Ơclid chẳng hạn) được suy ra bằng cách trừu tượng hóa những quan sát trên các sự vật vật lý: vết tiếp xúc của bút chì với tờ giấy hoặc của viên phấn với mặt bảng đen, những sợi dây căng thẳng, những tia sáng, những thanh rắn v. v... Các tính chất của điểm và đường thẳng hình học được mô tả bằng các tiên đề chính là những sự mô tả đơn giản hóa và lý tưởng hóa ở mức độ cao hành vi của « người anh em sinh đôi » vật lý học tương ứng với chúng. Qua hai vết chấm chì tùy ý không phải chỉ vẽ được một mà « nhiều đường thẳng ». Nếu đường kính của vết càng nhỏ thì các « đường thẳng » như vậy sẽ khó phân biệt với nhau.

Đấy là lý do mà ta đã phát biểu thành một tiên đề hình học «qua hai điểm bất kỳ có thể vẽ một và chỉ một đường thẳng»: ở đây ta nói về các điểm và đường thẳng hình học «trừu tượng» có tính chất thuần túy tư biện. Điểm và đường thẳng hình học có những tính chất đơn giản hơn nhiều so với các tính chất của bất kỳ sự vật vật lý nào. Sự đơn giản hóa là một điều kiện quan trọng cho phép xây dựng hình học bằng suy diễn.

Như ta đã nhấn mạnh, hình học thông thường của các điểm và đường thẳng đã trở nên phức tạp do tình trạng không có giao điểm của hai đường thẳng song song. Điều này thúc đẩy ta đơn giản hóa tiếp tục cấu trúc của hình học bằng cách mở rộng khái niệm điểm hình học để xóa bỏ trường hợp ngoại lệ đó cũng như ta đã mở rộng khái niệm số để xóa bỏ những hạn chế khi trừ và chia. Trong hình học, cũng như trong số học, chúng ta đã lưu tâm đến việc bảo toàn trong phạm vi đã mở rộng những qui luật đã chi phối các quan hệ trong phạm vi ban đầu.

Như vậy, *chúng ta qui ước rằng sẽ bổ sung thêm vào các điểm thông thường của một đường thẳng bất kỳ một điểm nữa — điểm lý tưởng — và sẽ coi điểm này đồng thời thuộc về tất cả các đường thẳng song song với đường thẳng đã cho mà không thuộc các đường khác.* Hệ quả của qui ước này là mọi cặp đường thẳng trên mặt phẳng đã cắt nhau ở một điểm duy nhất: các đường thẳng không song song thì cắt nhau ở điểm thông thường, những đường thẳng song song cắt nhau ở điểm «lý tưởng». Với lý do trực giác thì điểm lý tưởng này của đường thẳng được gọi là điểm xa vô tận trên đường thẳng.

Biểu tượng trực giác về điểm xa vô tận trên đường thẳng có thể dẫn đến ý kiến phải thêm vào *hai* điểm «lý tưởng» trên đường thẳng theo mỗi hướng của nó.

Ta chỉ bổ sung thêm một điểm cũng chỉ vì ta lưu ý đến việc bảo toàn định luật: qua hai đường thẳng vẽ được *một và chỉ một* đường thẳng. Nếu một đường thẳng có hai điểm xa vô tận cùng với tất cả những đường thẳng song song với nó thì qua hai «điểm» như vậy sẽ có một tập hợp vô số đường thẳng.

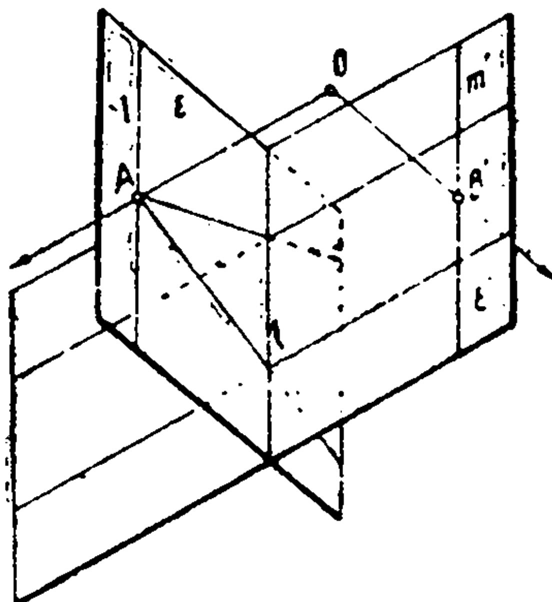
Ta cũng qui ước bổ sung thêm vào số các đường thẳng thông thường một đường thẳng nữa gọi là đường thẳng «xa vô tận» chứa tất cả các điểm xa vô tận của mặt phẳng và chỉ những điểm ấy mà thôi. Ta buộc phải thừa nhận qui ước đó nếu ta muốn bảo toàn định luật ban đầu — «qua hai điểm tùy ý có một đường thẳng» — và một định luật nữa «bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau tại một điểm». Thực vậy, ta lấy hai điểm lý tưởng bất kỳ. Đường thẳng duy nhất đi qua hai điểm đó không thể là đường thẳng thông thường, bởi vì theo qui ước đã được thừa nhận thì mỗi đường thẳng thông thường chỉ chứa một điểm lý tưởng. Mặt khác, đường thẳng đó không thể chứa những điểm thông thường, bởi vì qua một điểm thông thường và một trong những điểm lý tưởng tất yếu có một đường thẳng thông thường. Rút cục, đường thẳng được xét phải chứa *tất cả* các điểm lý tưởng, bởi vì ta muốn rằng nó phải có điểm chung với mọi đường thẳng thông thường. Như vậy, đường thẳng mà ta nói đến tất yếu phải có tất cả các tính chất mà ta đã gán cho đường thẳng lý tưởng ở trong mặt phẳng của ta.

Theo các qui ước đã được thừa nhận thì một điểm xa vô tận sẽ được xác định hoặc được biểu thị bởi một họ các đường thẳng song song, cũng giống như một số hữu tỉ được xác định bởi một dãy các đoạn hữu tỉ lồng nhau. Một phương pháp qui ước loại như vậy sẽ mô tả tính song song bằng các thuật ngữ lúc đầu dành cho những sự vật trực giác riêng rẽ, được thống nhất

lại với mục đích không kể thừa những trường hợp ngoại lệ, những trường hợp này bây giờ lại được ẩn dưới những thuật ngữ (và những thành ngữ) đã được dùng cho các trường hợp « thông thường » ban đầu.

Tóm lại: những qui ước của ta về phần tử xa vô tận đã được lựa chọn sao cho các định luật chi phối các mối tương quan liên thuộc giữa các điểm và đường thẳng thông thường được bảo toàn trong phạm vi mở rộng, sao cho việc tìm các giao điểm của hai đường thẳng, trước kia chỉ làm được trong trường hợp không song song, bây giờ sẽ thực hiện được không hạn chế. Những lý do đưa ta đến sự đơn giản hóa hình thức trong các tương quan liên thuộc được thể hiện có phần trừu tượng — Nhưng ở những trang tiếp sau, bạn đọc sẽ thấy chúng là những kết quả hoàn toàn có lý.

2. Những phần tử lý tưởng và phép chiếu. Việc đưa vào các điểm xa vô tận và đường thẳng xa vô tận trên mặt phẳng giúp ta xem xét phép chiếu của mặt phẳng này trên mặt phẳng khác một cách đầy đủ hơn Giả thử mặt phẳng π được chiếu trên mặt phẳng π'qua tâm O (H.83). Phép chiếu này xác lập một tương ứng giữa các điểm và các đường thẳng của π với các điểm và các đường thẳng của π'. Mỗi điểm A trên π tương ứng với một điểm duy nhất A' trên π' với các ngoại lệ sau đây: nếu một tia chiếu xuất phát từ O *song song* với mặt phẳng π' thì nó sẽ cắt π tại điểm A không tương ứng với



H. 83. Sự nảy sinh các phần tử xa vô tận trong phép chiếu

một điểm thông thường nào của π'. Những điểm ngoại lệ như vậy của mặt phẳng π sẽ nằm trên đường thẳng l không tương ứng với một đường thẳng thông thường nào của mặt phẳng π. Nhưng việc nêu những ngoại lệ đó sẽ là thừa nếu ta qui ước tương ứng điểm A với một điểm xa vô tận trên mặt phẳng π' lấy theo hướng của đường thẳng OA, tương ứng đường thẳng l với một đường thẳng xa vô tận trong mặt phẳng π'. Tương tự, ta cho tương ứng một điểm xa vô tận nào đó trong mặt phẳng π với một điểm B' ở trên một đường thẳng m' trong mặt phẳng π' sao cho mọi tia đi qua m' xuất phát từ O sẽ song song với mặt phẳng π. Bản thân đường thẳng m' sẽ tương ứng với một đường thẳng xa vô tận của mặt phẳng π. Bởi thế, bằng cách đưa vào trong mặt phẳng các điểm và đường thẳng xa vô tận ta sẽ được kết quả là: *hình chiếu của một mặt phẳng trên mặt phẳng khác sẽ quy định một tương ứng một – một giữa các điểm và đường thẳng của hai mặt phẳng* mà không có ngoại lệ nào. Hơn nữa, dễ thấy từ những qui ước đã được thừa nhận sẽ suy ra được hệ quả: một điểm nằm trên một đường thẳng nếu hình chiếu của điểm ấy nằm trên hình chiếu của đường thẳng. Từ đó thấy rằng mọi định lý có liên quan đến các điểm thẳng hàng, các đường thẳng đồng qui v.v... và những định lý chỉ nói về những điểm, những đường thẳng và các tương quan liên thuộc là bất biến đối với phép chiếu theo nghĩa rộng. Điều này cho phép ta xử lý các điểm xa vô tận của mặt phẳng π bằng cách thay chúng bởi các điểm tương ứng thông thường trên mặt phẳng π' có được trong phép chiếu.

Để có một « mô hình » Ơclid cụ thể của mặt phẳng mở rộng có thể dùng cái thể hiện của những điểm xa vô tận trên mặt phẳng π do phép chiếu từ một điểm O ở ngoài lên những điểm thông thường của mặt phẳng

khác π'. Muốn thế, ta sẽ không để ý đến mặt phẳng π' mà tập trung vào mặt phẳng π và những đường thẳng đi qua O. Mỗi điểm thông thường của π tương ứng với một đường thẳng đi qua O không song song với π; mỗi điểm xa vô tận của π tương ứng với một đường thẳng đi qua O song song với π. Như vậy, tập hợp tất cả các điểm thông thường và lý tưởng của π sẽ tương ứng với một tập hợp đường thẳng đi qua O, tương ứng này là một — một và không có ngoại lệ nào. *Những điểm ở* trên *một đường thẳng* nào đó trong mặt phẳng π biến thành *những đường thẳng* trên một mặt phẳng đi qua O. Một điểm và một đường thẳng trong mặt phẳng π là liên thuộc khi và chỉ khi đường thẳng và mặt phẳng đi qua O tương ứng là liên thuộc. Nói cách khác, hình học liên thuộc của các điểm và các đường thẳng trong mặt phẳng mở rộng là hoàn toàn tương đương với hình học liên thuộc của các đường thẳng và mặt phẳng thông thường đi qua một điểm cố định trong không gian.

Trong không gian ba chiều thì tình hình cũng hoàn toàn tương tự, tuy rằng không thể dùng phép chiếu làm công cụ trực quan. Ở đây, ta cũng đưa vào một điểm xa vô tận đặc biệt liên kết với mỗi họ đường thẳng song song. Trong mỗi mặt phẳng có một đường thẳng xa vô tận. sau đó, một phần tử mới được đưa vào, đó là mặt phẳng xa vô tận chứa tất cả các điểm xa vô tận của không gian và chứa tất cả các đường thẳng xa vô tận. Mỗi mặt phẳng thông thường sẽ cắt mặt phẳng vô tận theo một đường thẳng xa vô tận của nó.

3. Tỉ số kép với các phần tử xa vô tận. Còn phải nêu thêm một chú ý nữa về tỉ số kép với các phần tử xa vô tận. Ta ký hiệu điểm xa vô tận trên đường thẳng l là ∞. Ta xét xem ký hiệu $(ABC\infty)$ được xác định như thế nào nếu A, B, C là ba điểm thông thường trên l. Giả

thử P là một điểm nào đó trên l, khi đó (ABC ∞) được xem như giới hạn của (ABCP) khi P ra xa vô tận trên l. Nhưng:

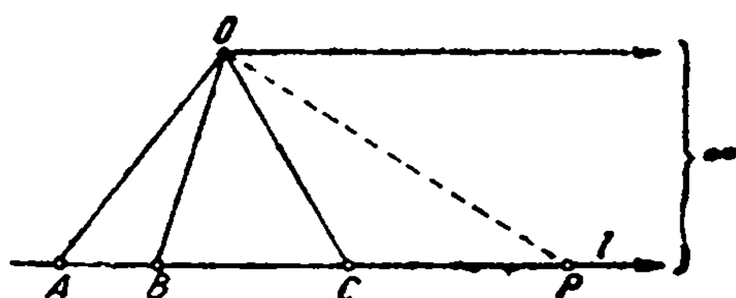
$$(ABCP) = \frac{CA}{CB} : \frac{PA}{PB}$$

Và khi P ra xa vô tận thì $\frac{PA}{PB}$ dần tới 1. Từ đó suy ra định nghĩa: $(ABC\infty) = \frac{CA}{CB}$

Đặc biệt, nếu $(ABC\infty) = 1$ thì C là trung điểm của đoạn AB: *trung điểm của một đoạn thẳng và điểm xa vô tận lấy theo hướng của đoạn thẳng sẽ chia điều hòa đoạn thẳng đó.*

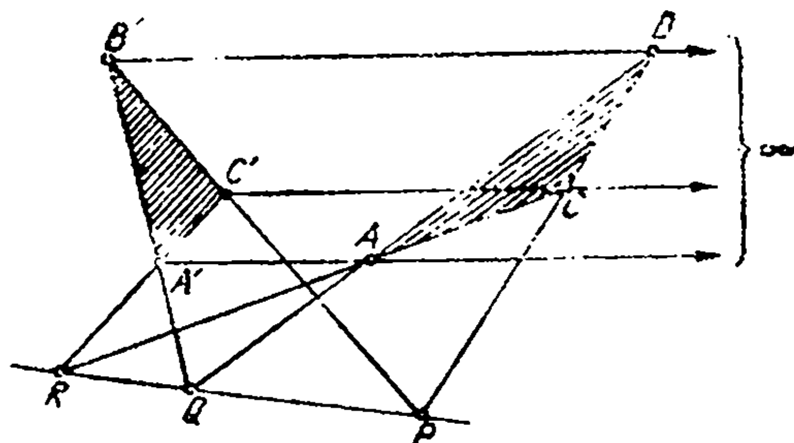
§. 5. CÁC ỨNG DỤNG

1. Chú ý mở đầu Sau khi đưa các phần tử xa vô tận vào, ta sẽ không phải đặt điều kiện trước cho mọi trường hợp song song ngoại lệ có trong các phép dựng và trong các chứng minh định lý. Chỉ cần nhớ rằng, nếu một điểm là xa vô tận thì mọi đường thẳng đi qua điểm đó là song song. Cũng không cần phân biệt giữa phép chiếu xuyên tâm và phép chiếu song song, bởi vì phép chiếu song song không có gì khác là phép chiếu từ một điểm xa vô tận. Điểm O hoặc đường thẳng PQR trên H.40 có thể là xa vô tận (H. 85



H. 84. Tỉ số kép khi có điểm vô tận

minh họa trường hợp thứ nhất), chúng tôi dành để bạn đọc luyện cách phát biểu bằng thuật ngữ « hữu hạn » (tức là những thuật ngữ không chứa cái vô hạn) những

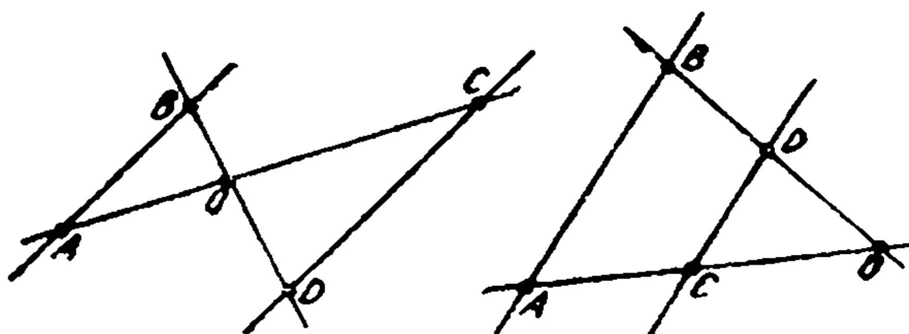


H.85. Cấu hình Đêdac với tâm vô tận

khẳng định tương ứng của định lý Đêdac. Không phải chỉ việc diễn đạt mà cả việc chứng minh các định lý của hình học xạ ảnh có thể được đơn giản đi do kết quả của việc đưa vào các phần tử xa vô tận. Nguyên tắc chung như sau. Ta qui ước gọi « một lớp xạ ảnh » của một hình hình học F nào đó là một lớp tất cả các hình được suy ra từ F qua những biến đổi xạ ảnh. Các tính chất xạ ảnh của F chính là các tính chất xạ ảnh của một hình bất kỳ trong lớp xạ ảnh của nó, bởi vì, theo định nghĩa thì các tính chất xạ ảnh được bảo toàn trong phép chiếu. Bởi thế, một định lý xạ ảnh bất kỳ (tức là một định lý chỉ nói đến các tính chất xạ ảnh) đúng với hình F cũng đúng với « một đại diện » bất kỳ của lớp xạ ảnh. Ta có thể lợi dụng kết quả này để chọn « một đại diện » nào đó mà đối với « đại diện » này thì việc chứng minh là đơn giản hơn so với bản thân hình F. Chẳng hạn, từ một tâm O cho trước có thể chiếu hai điểm A, B tùy ý của mặt phẳng π ra vô tận nếu chiếu chúng lên một mặt phẳng song song với mặt phẳng đi qua các điểm O, A, B; các đường thẳng đi qua A hoặc đi qua B sẽ biến thành một họ các đường thẳng song

song trong phép chiếu đó. Ta sẽ thực hiện một biến đổi sơ bộ như thế trong chứng minh các định lý xạ ảnh của chương này.

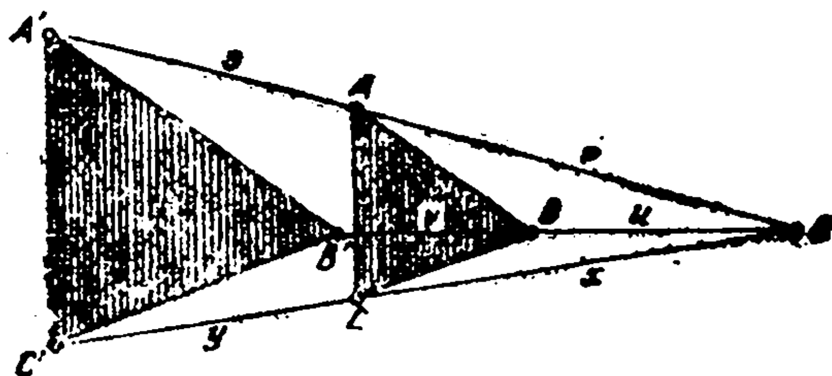
Ta sẽ dùng đến một tình thế sau đây có liên quan đến các đường thẳng song song. Giả thử hai đường thẳng đi qua điểm 0 cắt các đường thẳng l_1 và l_2 ở các điểm A, B, C, D như đã chỉ trên H. 86. Nếu các đường thẳng l_1 và l_2 song song thì



H. 86. Các tam giác đồng dạng tạo bởi các đường thẳng song song

$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ và ngược lại, nếu có hệ thức này thì các đường thẳng l_1 và l_2 sẽ song song. Chứng minh được suy ra từ các tính chất sơ cấp của tam giác đồng dạng sẽ dành cho bạn đọc.

2. Chứng minh định lý Đêdac trong mặt phẳng. Bây giờ, ta sẽ chứng minh (không dùng đến phép chiếu không gian) rằng, nếu hai tam giác ABC và A'B'C' ở trên mặt phẳng như H. 40, tức là nếu các đường thẳng nối các đỉnh tương ứng cắt nhau tại cùng một điểm thì giao điểm các cạnh tương ứng sẽ thẳng hàng. Muốn vậy, ta chiếu hình vẽ sao cho các điểm Q và R ra vô tận. Sau phép chiếu đó, đường thẳng A'B' sẽ song song với đường thẳng AB, đường thẳng A'C' sẽ song song với đường thẳng AC (H. 87). Như đã

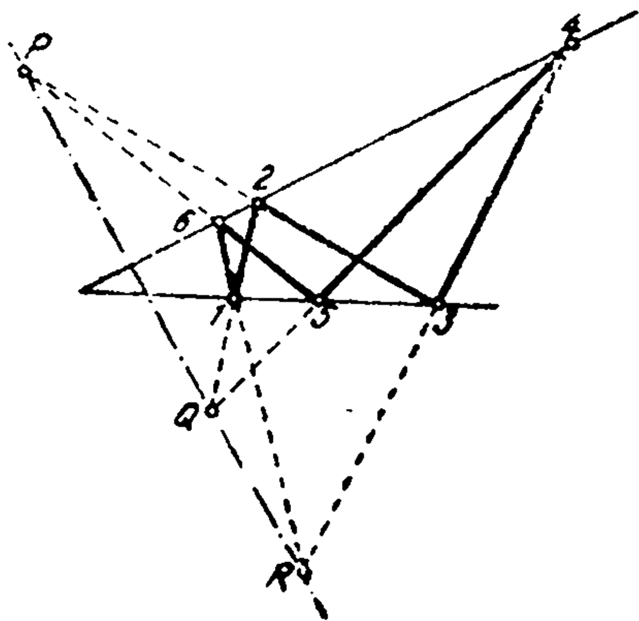


H. 87. Chứng minh định lý Đêdac

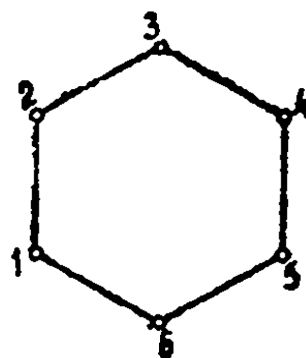
nhấn mạnh ở mục 1 chương này, muốn chứng minh định lý Đêdac trong trường hợp tổng quát thì chỉ cần chứng minh nó cho trường hợp hình vẽ đặc biệt đang xét ở đây. Tức là chỉ cần chứng minh giao điểm P của các cạnh BC và B'C' cũng ra xa vô tận nghĩa là B'C' song song với BC: khi đó các điểm P, Q, R sẽ cộng tuyến (bởi vì cả ba sẽ nằm trên đường thẳng vô tận). Ta lưu ý rằng: AB//A'B' kéo theo $\frac{u}{v} = \frac{r}{s}$; AC//A'C' kéo theo $\frac{x}{y} = \frac{r}{s}$. Bởi thế $\frac{u}{v} = \frac{x}{y}$ và BC//B'C' (đpcm).

Cần nhấn mạnh rằng chứng minh định lý Đêdac vừa nêu dựa trên khái niệm độ dài đoạn thẳng toán học. Cho nên, trong trường hợp này thì một định lý xạ ảnh đã được chứng minh bằng các phương tiện mètric. Một chú ý quan trọng khác là như sau. Trước đây ta đã chỉ ra rằng khái niệm biến đổi xạ ảnh có thể cho bởi một định nghĩa « nội tại » (« biến đổi xạ ảnh của mặt phẳng là một biến đổi giữ nguyên mọi tỉ số kép »). Từ đó suy ra định lý Đêdac có thể được diễn đạt và chứng minh mà không vượt ra ngoài không gian tức là không cần đến các biểu diễn và phép dựng ba chiều.

3. Định lý Paxcal [1] Định lý này được phát biểu như sau: *Nếu các đỉnh của một hình lục giác lần lượt nằm trên hai đường thẳng cắt nhau thì các giao điểm P, Q, R của các cạnh đối diện của lục giác này thẳng hàng* (H. 88) (chu tuyến của lục giác có thể tự cắt. Cũng dễ nhận ra thế nào là các cạnh « đối » qua H. 89).



H. 88. Cấu hình Paxcal



H. 89. Đánh số các đỉnh lục giác đều

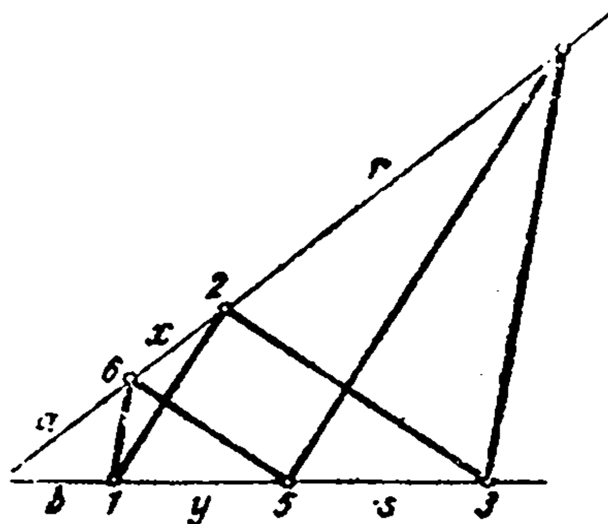
Có thể giả thiết P và Q ra vô tận nếu thực hiện một phép chiếu sơ bộ. Còn phải chứng minh rằng R cũng ra vô tận. Tình huống đó được minh họa trên H. 90, trong đó 23//56 và 12//45. Cần chứng minh 16//34. Ta có:

$$\frac{a}{a+x} = \frac{b+y}{b+y+s}, \quad \frac{b}{b+y} = \frac{a+x}{a+x+r}.$$

---

(1) Ở § 8, mục 4 ta sẽ xét định lý tổng quát hơn. Trường hợp đặc biệt ở đây cũng liên quan đến tên tuổi của Alêxăng Papa (thế kỷ III trước công nguyên).

Cho nên : $\frac{a}{b} = \frac{a+x+r}{b+y+s}$, suy ra 16//34 (đpcm).



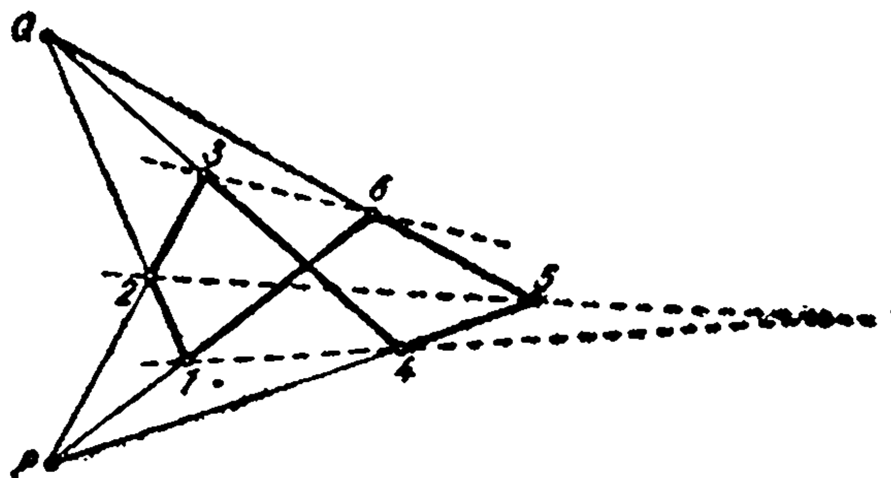
H. 90. Chứng minh định lý Paxcan

4. Định lý Briansôn

Định lý này được phát biểu như sau: *Nếu các cạnh của hình lục giác lần lượt đi qua hai điểm P và Q cho trước thì ba đường chéo nối các đỉnh đối diện của lục giác sẽ đồng qui* (H. 91).

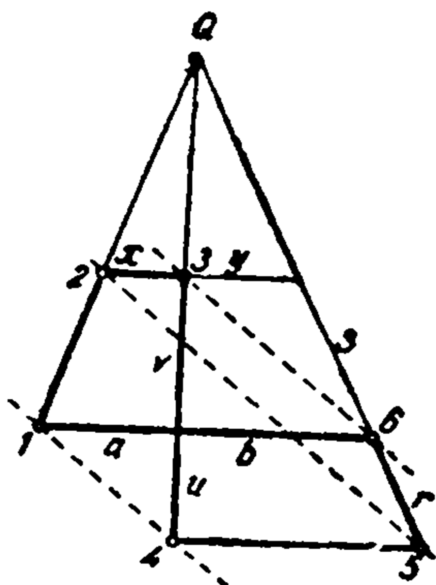
Bằng một phép chiếu sơ bộ có thể làm cho P và điểm mà hai đường chéo bất kỳ, chẳng hạn 14 và 36, cắt nhau ở xa vô tận. Tình huống này được biểu diễn trên H. 92.

Bởi vì 14//36 thì $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$. Nhưng đồng thời $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ và



H. 91. Câu hình Briansôn

$\frac{u}{v} = \frac{r}{s}$. Nghĩa là $\frac{x}{y} = \frac{r}{s}$



H. 92. Chứng minh định lý Briansôn

bởi thế 36//25, tức là cả ba đường chéo song song với nhau, tức là chúng đồng qui. Như thế đã đủ để định lý được chứng minh trong trường hợp tổng quát.

5. **Chú ý về tính đối ngẫu.** Có lẽ bạn đọc đã nhận ra sự giống nhau đặc biệt của các định lý Paxcal (1623 — 1662) và định lý Briansôn (1785 — 1864). Sự giống nhau này được thể hiện rõ nếu đặt hai cách diễn đạt cạnh nhau:

Định lý Paxcal

Nếu các đỉnh của hình lục giác đều lần lượt nằm trên hai đường thẳng thì giao điểm các cạnh đối diện thẳng hàng

Định lý Briansôn

Nếu các cạnh của hình lục giác đều lần lượt đi qua hai điểm thì các đường thẳng nối các đỉnh đối diện đồng qui.

Không những chỉ có định lý Paxcal và Briansôn, mà nói chung, tất cả các định lý của hình học xạ ảnh có thể nhóm lại từng đôi sao cho hai định lý trong cùng một cặp giống nhau, nghĩa là đồng nhất với nhau về cấu trúc. Hiện tượng này có tên là *tính đối ngẫu*. Trong hình học phẳng thì điểm và đường thẳng là các phần tử đối ngẫu với nhau. Vẽ đường thẳng qua một điểm và đánh dấu một điểm trên một đường thẳng là hai thao tác đối ngẫu với nhau. Hai hình được gọi là đối ngẫu với nhau nếu hình này thu được từ hình kia bằng

cách thay thế mỗi phần tử và mỗi thao tác bằng một phần tử đối ngẫu và một thao tác đối ngẫu. Hai định lý là đối ngẫu với nhau nếu định lý này biến thành định lý kia trong phép thay thế mỗi phần tử và mỗi thao tác bằng một phần tử đối ngẫu và một thao tác đối ngẫu. Chẳng hạn, định lý Paxcal và Briansôn là đối ngẫu với nhau, trong khi định lý đối ngẫu với định lý Đêdac là định lý đảo của nó. Hiện tượng đối ngẫu phân biệt rất rõ hình học xạ ảnh với hình học sơ cấp (mêtric) vì hình học sơ cấp không có tính đối ngẫu (Chẳng hạn, không thể nào tìm ra được một khẳng định «đối ngẫu» với sự kiện là một góc cho trước chứa 37^0 hoặc một đoạn thẳng cho trước bằng 2 đơn vị dài). *Nguyên tắc đối ngẫu mà theo đó mỗi định lý đúng của hình học xạ ảnh được cho ứng với một định lý đối ngẫu với nó cũng đúng* đã được nhấn mạnh trong nhiều sách giáo khoa bằng cách sắp xếp các phát biểu và chứng minh định lý song song nhau như ta đã làm ở trên đây. Nguyên nhân nội tại của hiện tượng đối ngẫu sẽ được nghiên cứu trong chương sau.

§. 6 BIỂU DIỄN GIẢI TÍCH

1. Chú ý mở đầu. Trong thời kỳ đầu của sự phát triển hình học xạ ảnh tồn tại một xu hướng kiên trì thực hiện tất cả các phép dựng trên cơ sở tổng hợp hoặc «thuần túy hình học» như ta thường nói, tránh hoàn toàn không áp dụng các phương pháp đại số. Việc thực hiện xu hướng này đã gặp nhiều khó khăn lớn bởi vì luôn luôn có những chỗ mà ở đó những diễn đạt đại số là không thể tránh khỏi. Mãi đến cuối thế kỷ XIX mới đạt được thành công hoàn toàn trong việc

xây dựng hình học xạ ảnh thuần tùy tổng hợp với những phức tạp đáng kể. Về mặt này thì phương pháp của hình học giải tích đã tỏ ra có hiệu quả. Toán học hiện đại được đặc trưng bởi một xu hướng khác dựa trên cơ sở xây dựng khái niệm số, còn trong hình học thì xu hướng đó, bắt đầu từ Fecma đến Đềcac, đã giành thắng lợi quyết định. Hình học giải tích đã không còn là một công cụ thứ yếu phục vụ cho các lập luận hình học mà đã trở thành một lĩnh vực độc lập, trong đó một thể hiện hình học có tính chất trực giác của các thao tác và kết quả đã không phải là mục đích cuối cùng, mà có chức năng của một nguyên tắc chỉ đạo giúp chúng ta dự đoán và hiểu các sự kiện của giải tích. Sự thay đổi như vậy về giá trị của hình học là hệ quả của sự phát triển tiệm tiến của hình học trong bình diện lịch sử của những sự phát triển và của những khuôn khổ được mở rộng của các khái niệm cổ điển; đồng thời sự thay đổi đó đã thúc đẩy sự gắn bó gần như hữu cơ của hình học và giải tích.

Trong hình học giải tích thì «các tọa độ» của một sự vật hình học được hiểu như một tập hợp *tùy ý* các số cho phép ta xác định sự vật đó một cách *đơn trị*. Chẳng hạn, điểm được xác định bởi các tọa độ vuông góc x, y hoặc bởi các tọa độ cực P, θ của nó; hình tam giác được xác định bởi các tọa độ của ba đỉnh gồm tất cả sáu tọa độ. Ta biết rằng một đường thẳng ở trong mặt phẳng x,y là quĩ tích của tất cả các điểm P(x,y) mà các tọa độ của chúng thỏa mãn phương trình tuyến tính $ax + by + c = 0$ (1) nào đó. Bởi thế, có thể gọi ba số a, b, c là «các tọa độ» của đường thẳng ấy. Chẳng hạn, $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ xác định đường thẳng $y = 0$, tức là trục x; $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ xác định đường thẳng $x = y$ chia đôi góc giữa hướng dương của trục x và hướng dương của trục y, Cũng

như vậy, các phương trình sau đây sẽ xác định « các thiết diện Cô-nic » : $x^2 + y^2 = r^2$ — đường tròn bán kính r có tâm ở gốc tọa độ; $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ — đương tròn bán kính r, tâm (a,b); $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — elip vv... Thái độ ngây thơ đối với hình học giải tích muốn xuất phát từ những biểu diễn « hình học » thuần túy — điểm, đường thẳng v.v... — rồi phiên dịch chúng ra ngôn ngữ số. Quan điểm hiện đại là đối lập. Ta sẽ xuất phát từ một *tập hợp tất cả các cặp số x,y có thể có được và gọi* mỗi cặp như thế là *một điểm* bởi vì ta muốn *thể hiện* một cách trực quan một cặp số như vậy bằng một khái niệm điểm hình học dễ hiểu. Cũng vậy, đường thẳng là một biểu diễn hình học hoặc một thể hiện của phương trình tuyến tính liên hệ x và y. Sự thay đổi trọng tâm từ nhận thức trực giác của hình học đến nhận thức giải tích sẽ mở ra khả năng định nghĩa đơn giản và hoàn toàn chặt chẽ các điểm xa vô tận trong hình học xạ ảnh. Nó cũng cần thiết cho việc thâm nhập sâu sắc vào lĩnh vực này. Đối với những bạn đọc đã có đủ những chuẩn bị sơ bộ về toán học, chúng tôi sẽ cung cấp vài nét về áp dụng các phương pháp giải tích trong hình học xạ ảnh.

* **2. Tọa độ đẳng cấp — Cơ sở đại số của tính đối ngẫu.** Trong hình học giải tích thông thường, các khoảng cách từ một điểm tới hai trục vuông góc cùng với dấu của chúng là các tọa độ của một điểm trong mặt phẳng. Nhưng, trong một hệ tọa độ như vậy sẽ không có chỗ cho những điểm xa vô tận của mặt phẳng xạ ảnh mở rộng. Cho nên, nếu muốn áp dụng các phương pháp giải tích vào hình học xạ ảnh thì phải tìm một hệ tọa độ nào đó chứa các điểm lý tưởng bình đẳng với các điểm thông thường. Nếu ta hình dung một mặt phẳng X, Y cho trước (biểu thị là π) nằm trong

không gian ba chiều với các tọa độ vuông góc x, y, z (các chữ này biểu thị các khoảng cách từ một điểm đến ba mặt phẳng tọa độ tạo bởi các trục x, y và z và có cùng với dấu của chúng) thì có thể mô tả dễ dàng một hệ tọa độ như vậy. Mặt phẳng π song song với mặt phẳng tọa độ x, y và cách mặt phẳng này 1, tức là tọa độ ba chiều của một điểm P trong mặt phẳng π là (X, Y, 1). Lấy gốc O của hệ tọa độ làm tâm của phép chiếu, ta nhận thấy rằng mọi điểm P sẽ tương ứng một — một với một đường thẳng OP nào đó đi qua gốc tọa độ. Nói riêng, các điểm xa vô tận của mặt phẳng π sẽ tương ứng với những đường thẳng đi qua O và song song với π.

Bây giờ ta xét xem thế nào là hệ tọa độ đẳng cấp của các điểm trên mặt phẳng π. Muốn tìm các tọa độ đẳng cấp ta chọn một điểm *bất kỳ* Q khác O (H. 93). Các tọa độ ba chiều x, y, z của điểm Q sẽ được coi là các *tọa độ đẳng cấp của điểm P trong mặt phẳng* π. Nói riêng, các tọa độ (X, Y, 1) của bản thân điểm P là các tọa độ đẳng cấp của nó. Đồng thời các số tùy ý (tX, tY, t) (trong đó $t \neq 0$) cũng là tọa độ đẳng cấp của nó, bởi vì tọa độ của mọi điểm của đường thẳng OP (trừ O) đều có dạng như thế. Ta loại trừ điểm (O, O, O) vì nó nằm trên mọi đường thẳng đi qua O và không thể dùng nó để phân biệt các đường thẳng này.

Tất nhiên, hệ tọa độ đẳng cấp là bất tiện ở chỗ cần có ba số thay cho hai số để xác định một điểm, nhưng điều cốt yếu lại là, tọa độ của một điểm không được xác định một cách đơn trị mà sai khác một thừa số không đổi. Tuy vậy, nó có một ưu điểm rõ rệt là chứa được cả những điểm lý tưởng xa vô tận của mặt phẳng π. Thực vậy, một điểm lý tưởng P sẽ tương ứng với một đường thẳng đi qua O, song song với π; mọi điểm Q trên đường thẳng này có tọa độ dạng (x, y, O); như

vậy, *các tọa độ của điểm lý tưởng trên mặt phẳng π có dạng* (x, y, O). Có thể viết dễ dàng phương trình tọa độ đẳng cấp của một đường thẳng trên mặt phẳng π. Muốn vậy, chỉ cần lưu ý rằng các đường thẳng nối O với các điểm của đường thẳng đó đều nằm trên mặt phẳng đi qua O. Trong hình học giải tích ta đã chứng minh phương trình của mặt phẳng này có dạng:

$$ax + by + cz = 0 \quad (1)$$

Đó cũng là phương trình của đường thẳng đã cho trong tọa độ đẳng cấp. Bây giờ, khi mà mô hình hình học biểu diễn các điểm của mặt phẳng π dưới dạng các đường thẳng đi qua O đã làm xong nhiệm vụ của nó, ta có thể bỏ nó đi và đưa ra định nghĩa thuần túy giải tích của mặt phẳng mở rộng như sau:

Điểm là một bộ ba số thực (x, y, z) không bằng 0 tất cả. Hai bộ ba số (x_1, y_1, z_1) và (x_2, y_2, z_2) như vậy sẽ xác định *cùng một điểm* nếu có một số $t \neq 0$ sao cho:

$$x_2 = tx_1,\ y_2 = ty_1,\ z_2 = tz_1$$

Nói cách khác, có thể nhân các tọa độ với một thừa số tùy ý khác 0 mà không thay đổi bản thân điểm đó (vì thế các tọa độ này được gọi là *đẳng cấp*). Điểm (x, y, z) là *thông thường* nếu $z \neq 0$, là *lý tưởng* nếu $z = 0$.

Một đường thẳng trong mặt phẳng π bao gồm tất cả các điểm (x, y, z) thỏa mãn phương trình tuyến tính dạng

$$ax + by + cz = 0 \quad (1')$$

trong đó a, b, c là những số không đổi không bằng 0 tất cả. Nói riêng, các điểm xa vô tận của mặt phẳng π sẽ thỏa mãn phương trình

$$z = 0; \quad (2)$$

theo định nghĩa thì đó cũng là phương trình của *đường thẳng xa vô tận* của mặt phẳng π. Vì một đường thẳng được xác định bởi phương trình dạng (1'), cho nên bộ

ba số (a, b, c) có thể được xem như các tọa độ đẳng cấp của đường thẳng (1'). Hơn nữa ta còn suy ra, với $t \neq 0$ bất kỳ, bộ ba số (ta, tb, tc) cũng chính là tọa độ của đường thẳng đó, bởi vì phương trình:

$$(ta)\,x + (tb)\,y + (tc)\,z = 0 \qquad (3')$$

cũng được thỏa mãn với bộ ba (x, y, z) như phương trình (1').

Ta thấy được trong các định nghĩa này sự đối xứng đầy đủ giữa điểm và đường thẳng. Chúng đều được xác định bởi một bộ ba số là các tọa độ đẳng cấp (u, v, w). Điều kiện để điểm (x, y, z) nằm trên đường thẳng (a, b, c) được biểu thị bởi đẳng thức:

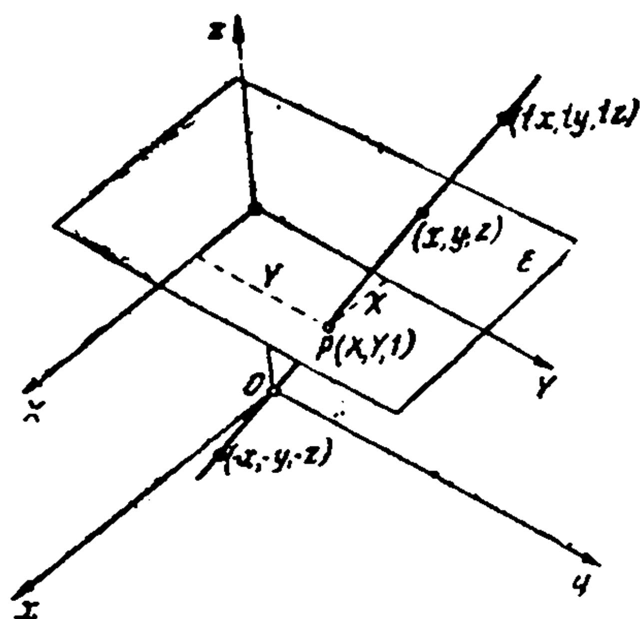
$$ax + by + cz = 0,$$

đó cũng là điều kiện để điểm có tọa độ (a, b, c) nằm trên đường thẳng có tọa độ (x, y, z). Chẳng hạn, đồng nhất thức số học: $2.3 + 1.4 + (-5).2 = 0$ có nghĩa là điểm (3, 4, 2) nằm trên đường thẳng (2, 1, —5) cũng như điểm (2, 1, —5) nằm trên đường thẳng (3, 4, 2). Sự đối xứng đó chính là cơ sở của tính đối ngẫu giữa điểm và đường thẳng trong hình học xạ ảnh, bởi vì mỗi hệ thức giữa các điểm và các đường thẳng sẽ là một hệ thức giữa các đường thẳng và các điểm, nếu các tọa độ được thể hiện ngược lại: các tọa độ của đường thẳng được coi là các tọa độ của điểm. Mọi phép toán đại số và kết quả vẫn như thế nhưng nếu được giải thích khác đi, ta sẽ có một định lý tương ứng với *định lý ban đầu về mặt đối ngẫu*. Mặt khác, nên lưu ý rằng trong mặt phẳng X, Y thông thường, không thể nói đến tính đối ngẫu như vậy vì phương trình của đường thẳng trong tọa độ thông thường

$$aX + bY + c = 0$$

là không đối xứng đối với X, Y và a, b, c. Chỉ có đưa thêm các phần tử xa vô tận vào (điểm và đường thẳng) mới bảo đảm áp dụng được nguyên tắc đối ngẫu.

Muốn chuyển từ các tọa độ đẳng cấp x, y, z, của điểm thông thường P trong mặt phẳng π thành tọa độ vuông góc thông thường, ta đặt $X = \frac{x}{z}$, $Y = \frac{y}{z}$. Khi đó X, Y biểu thị khoảng cách từ điểm P đến hai trục vuông góc của mặt phẳng π, song song với trục x và trục y như đã chỉ trên H. 93



H. 93. Tọa độ đẳng cấp.

Ta biết phương trình

$$aX + bY + c = 0$$

biểu thị một đường thẳng trong mặt phẳng π. Đặt $X = \frac{x}{z}$, $Y = \frac{y}{z}$ và nhân với z ta được phương trình của cũng đường thẳng ấy trong tọa độ đẳng cấp là :

$$ax + by + cz = 0.$$

Chẳng hạn, phương trình của đường thẳng $2x - 3y + z = 0$ trong hệ tọa độ vuông góc thông thường X, Y sẽ có dạng $2X - 3Y + 1 = 0$. Nhớ rằng điểm vô tận của đường thẳng đang xét có tọa độ (3, 2, 0) đã không thỏa mãn phương trình sau cùng này.

Ta đã có một định nghĩa thuần túy giải tích của điểm và đường thẳng ; có thể nói gì về khái niệm biến đổi xạ ảnh? Có thể chứng tỏ rằng, một biến đổi xạ ảnh, được hiểu với ý nghĩa đã giải thích ở trên, sẽ được cho (bằng giải tích) bởi một hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases} \qquad (4)$$

liên kết các tọa độ đẳng cấp x', y', z' của các điểm trong mặt phẳng π', với các tọa độ đẳng cấp x, y, z của các điểm trong mặt phẳng π. Với quan điểm tương tự, có thể *định nghĩa* một biến đổi xạ ảnh sao cho nó được qui định bởi một hệ phương

trình dạng (4). Khi đó, các định lý của hình học xạ ảnh sẽ trở thành các định lý nói về sự thay đổi của các bộ ba số (x, y, z) trong những biến đổi đó. Chẳng hạn, việc chứng minh tính bất biến của tỉ số kép trong các biến đổi xạ ảnh sẽ trở thành một bài tập dễ trong phạm vi đại số học các biến đổi tuyến tính. Chúng ta sẽ không đi sâu vào qui trình giải tích đó mà trở lại với hình học xạ ảnh ở mặt trực quan hơn của nó.

§ 7. CÁC BÀI TOÁN DỰNG CHỈ BẰNG MỘT THƯỚC KẺ

Trong các phép dựng sau đây ta giả thiết chỉ dùng một dụng cụ duy nhất — thước kẻ:

Các bài toán 1 – 18 được trích ra từ một tác phẩm của Ia. Stâyner, trong đó ông chứng minh rằng có thể không cần dùng đến compa trong các phép dựng hình học nếu cho trước một hình tròn với tâm xác định (xem chương III,). Đề nghị bạn đọc làm những bài toán đó theo trình tự đã chỉ dẫn.

Bốn đường thẳng a, b, c, d đi qua điểm P gọi là *điều hòa* nếu tỉ số kép (abcd) bằng -1. Trong trường hợp này, ta nói rằng c, d liên hợp điều hòa với a, b và ngược lại.

1. Chứng minh rằng nếu trong chùm điều hòa a, b, c, d, đường thẳng a chia đôi góc giữa c và d thì đường thẳng b vuông góc với đường thẳng a.

2. Dựng đường thẳng điều hòa thứ tư với ba đường thẳng cho trước đi qua một điểm cho trước (Chỉ dẫn: dùng định lý tứ giác toàn phần).

3. Dựng điểm điều hòa thứ tư với ba điểm cho trước trên một đường thẳng.

4. Cho một góc vuông và một góc bất kỳ với đỉnh chung và một cạnh chung. Gấp đôi góc bất kỳ đã cho.

5. Cho một góc và đường phân giác b của nó. Dựng đường vuông góc với b tại đỉnh của góc cho trước.

6. Chứng minh rằng nếu các đường thẳng $l_1, l_2, \ldots l_n$ đi qua điểm P cắt đường thẳng a tại các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và cắt

đường thẳng b tại các điểm $B_1, B_2, \ldots B_n$ thì tất cả các giao điểm của các cặp đường thẳng A_iB_k và A_kB_i ($i \neq k$; $i, k = 1, 2, \ldots n$) nằm trên một đường thẳng.

7. Chứng minh rằng nếu trong tam giác ABC, một đường thẳng song song với cạnh BC cắt AB ở điểm B' và cắt AC ở điểm C' thì đường thẳng nối điểm A với điểm D (giao điểm của các đường thẳng B'C và C'B) sẽ chia đôi BC.

7a. Phát biểu và chứng minh định lý đảo của 7.

8. Trên đường thẳng l cho ba điểm P, Q, R sao cho Q là trung điểm của đoạn PR. Dựng đường thẳng song song với l và đi qua một điểm S cho trước.

9. Cho hai đường thẳng song song l_1 và l_2. Chia đôi đoạn thẳng AB cho trước trên đường thẳng l_1.

10. Qua một điểm P cho trước dựng đường thẳng song song với hai đường thẳng song song với nhau cho trước l_1 và l_2 (Chỉ dẫn: áp dụng 7).

11. Stâyner đề nghị một lời giải sau đây của bài toán gấp đôi đoạn thẳng AB cho trước với điều kiện cho trước đường thẳng l song song với AB: Qua điểm C không nằm trên đường thẳng l, không nằm trên AB, dựng các đường thẳng CA và CB Giả thử A_1 và B_1 là các giao điểm của chúng (theo thứ tự) với đường thẳng l. Sau đó (xem 10), dựng qua C một đường thẳng song song với l. Giả thử D là giao điểm của nó với BA_1. Nếu E là giao điểm của AB và DB_1 thì $AE = 2 \cdot AB$.

Hãy chứng minh điều này.

12. Chia đoạn AB thành n phần bằng nhau nếu cho trước một đường thẳng l song song với AB. (Chỉ dẫn: dùng 11, đầu tiên đặt n lần đoạn thẳng đã cho trên đường thẳng l).

13. Cho hình bình hành ABCD. Qua điểm P cho trước dựng đường thẳng song song với đường thẳng l cho trước (Chỉ dẫn: áp dụng 10 vào tâm hình bình hành và áp dụng 8).

14. Cho hình bình hành. Gấp một đoạn cho trước n lần (Chỉ dẫn: áp dụng 13 và 11).

15. Cho hình bình hành. Chia một đoạn thẳng cho trước thành n phần bằng nhau.

16. Cho hình tròn với tâm cố định. Qua một điểm cho trước dựng đường thẳng song song với đường thẳng cho trước (Chỉ dẫn: áp dụng 13).

17. Cho hình tròn với tâm cố định. Tăng và giảm đoạn thẳng cho trước n lần (Chỉ dẫn: áp dụng 13)

18. Cho hình tròn với tâm cố định. Qua một điểm cho trước dựng đường vuông góc với đường thẳng cho trước (Chỉ dẫn: dùng hình chữ nhật nội tiếp trong hình tròn đã cho có hai cạnh song song với đường thẳng đã cho, rồi qui về bài toán trước).

19. Xem lại các bài toán 1 — 18 và kể ra những bài toán dựng cơ bản có thể thực hiện được nhờ thước kẻ hai lề (với hai cạnh song song).

20. Hai đường thẳng l_1 và l_2 cho trước cắt nhau ở điểm P vượt *ra ngoài giới hạn* của hình vẽ. Dựng đường thẳng nối điểm Q cho trước với điểm P (Chỉ dẫn: bổ sung thêm những phần tử cho trước sao cho có được cấu hình của định lý Đêdac phẳng, trong đó P và Q là giao điểm của các cạnh tương ứng của hai tam giác).

21. Qua hai điểm có khoảng cách lớn hơn độ dài của thước kẻ hãy dựng một đường thẳng. (Chỉ dẫn: áp dụng 20).

22. Các đường thẳng l_1 và l_2 cắt nhau tại điểm P. Các đường thẳng m_1 và m_2 cắt nhau ở điểm Q. Hai điểm P và Q ở ngoài giới hạn của hình vẽ. Dựng phần đường thẳng PQ ở trong giới hạn của hình vẽ. (Chỉ dẫn: muốn tìm một điểm của đường thẳng PQ hãy dựng cấu hình Đêdac sao cho hai cạnh của một tam giác theo thứ tự nằm trên l_1 và m_1, hai cạnh của tam giác kia theo thứ tự nằm trên l_2 và m_2).

23. Giải 20 bằng định lý Paxcal. (Chỉ dẫn: dựng cấu hình Paxcal bằng cách coi l_1 và l_2 là một cặp cạnh đối của lục giác, còn Q là giao điểm của cặp cạnh đối kia.

24. Mỗi một trong hai đường thẳng hoàn toàn nằm ở ngoài giới hạn của hình vẽ được cho bởi hai cặp đường thẳng cắt nhau tại các điểm trên đường thẳng kia ở ngoài giới hạn của hình vẽ. Xác định giao điểm của chúng nhờ hai đường thẳng cắt nhau ở ngoài hình vẽ.

§ 8. THIẾT DIỆN CÔNIC VÀ CÁC MẶT BẬC HAI

1. Hình học mêtric sơ cấp của các thiết diện cônic. Cho đến bây giờ, chúng ta mới chỉ nghiên cứu các điểm,

đường thẳng, mặt phẳng và hình gồm một số hữu hạn những yếu tố đó. Nếu như hình học xạ ảnh chỉ giới hạn ở việc xem xét những hình «tuyến tính» như vậy thì nó sẽ tương đối kém phần thú vị. Nhưng sự kiện có giá trị hàng đầu là, hình học xạ ảnh không hạn chế ở đó mà còn bao hàm một phạm vi rộng lớn các thiết diện cônic và những khái quát nhiều chiều của chúng. Định nghĩa mêtric của Apôlôniut về thiết diện cônic — elip, hypebol và parabol — là một trong những thành tựu xuất sắc của toán học cổ điển. Vị tất đã có thể đánh giá được ý nghĩa của các thiết diện cônic đối với toán học thuần túy cũng như đối với toán học ứng dụng (chẳng hạn, quĩ đạo của các hành tinh và quĩ đạo của êlectrôn trong nguyên tử Hyđrô đều là các thiết diện cônic). Không lấy gì làm ngạc nhiên rằng lý thuyết các thiết diện cổ điển nảy sinh từ thời cổ Hy Lạp cho đến ngày nay vẫn còn là một bộ phận cần thiết của học vấn toán học. Nhưng chắc chắn hình học Hy Lạp không thể nói lên được điều này. Sau hai nghìn năm, nhiều tính chất xạ ảnh đặc biệt của các thiết diện cônic đã được phát hiện ra. Bất chấp sự đơn giản và trang nhã của các tính chất đó, tính bảo thủ kinh viện cho đến nay vẫn là sự cản trở cho việc thâm nhập của các tính chất ấy vào việc giảng dạy ở nhà trường.

Ta bắt đầu với việc nhắc lại các định nghĩa mêtric của thiết diện cônic. Những định nghĩa này và một phần tính tương đương của chúng đã được chứng minh trong hình học sơ cấp. Những định nghĩa phổ biến nhất thuộc về *các tiêu điểm* của đường cong. *Elip* được định nghĩa là quĩ tích những điểm P trong mặt phẳng sao cho tổng các khoảng cách r_1 và r_2 của chúng tới hai điểm F_1, F_2 cho trước (gọi là các tiêu điểm) có giá trị không đổi (nếu hai tiêu điểm trùng nhau thì đường cong biến thành đường tròn). *Hypebol* được định nghĩa là quĩ tích những điểm P trong mặt phẳng sao cho

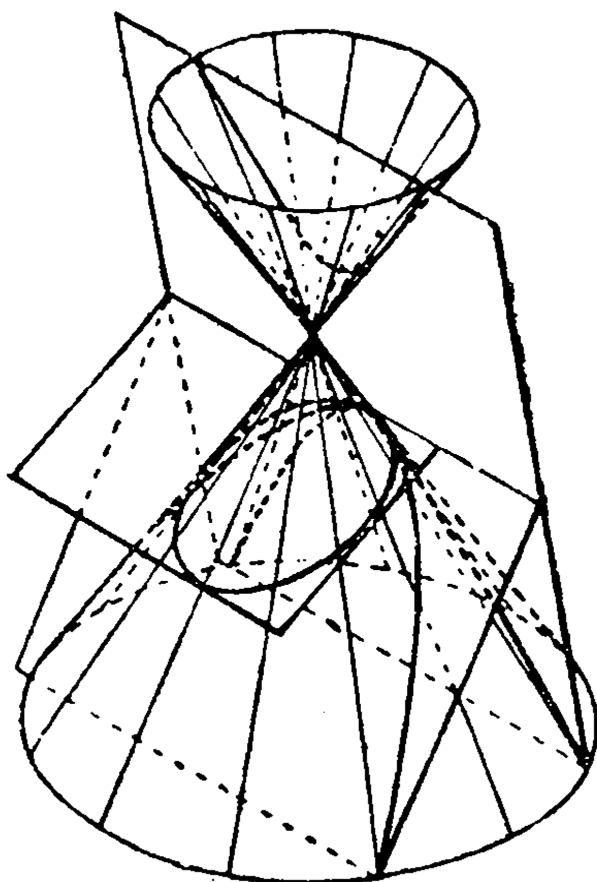
giá trị tuyệt đối của hiệu $r_1 - r_2$ bằng một đại lượng không đổi. *Parabol* được định nghĩa là quĩ tích những điểm P có khoảng cách r đến một điểm F cho trước bằng khoảng cách đến một đường thẳng l cho trước.

Trong hình học giải tích, những đường cong này được biểu thị bởi những phương trình bậc hai đối với các tọa độ vuông góc x, y. Dễ chứng minh đảo lại rằng mọi đường cong biểu thị bởi phương trình bậc hai:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

là hoặc một trong ba thiết diện cônic có tên ở trên hoặc đường thẳng, hoặc một cặp đường thẳng, hoặc thu lại thành một điểm, hoặc có tính chất ảo thuần túy. Như trong giáo trình hình học giải tích đã chỉ rõ, muốn chứng minh những điều đó, ta chỉ cần thay thế hệ tọa độ cho thích hợp.

Các định nghĩa thiết diện cônic dẫn ra ở trên là những định nghĩa thực sự mêtric: trong chúng có dùng khái niệm khoảng cách. Sau đây là một định nghĩa khác xác nhận vị trí của các thiết diện cônic trong hình học xạ ảnh: *các thiết diện cônic chính là các hình chiếu của đường tròn trên mặt phẳng*. Nếu ta chiếu đường tròn C từ một điểm O nào đó thì các đường thẳng chiếu sẽ tạo nên một mặt nón kép vô hạn và giao của mặt nón này với mặt phẳng π sẽ là các hình chiếu của đường tròn C. Giao tuyến cong sẽ là Elip hoặc Hypebol tùy theo mặt phẳng chỉ cắt một « hốc »

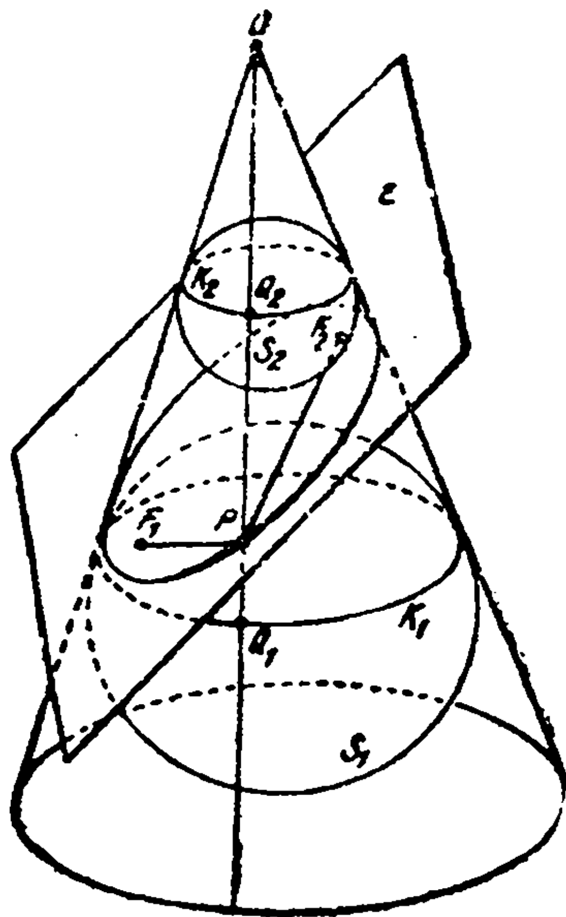


H. 94. Các thiết diện cônic

của hình nón hay cắt cả hai. Có thể xảy ra trường hợp trung gian — Parabol — nếu mặt phẳng π song song với một trong các đường thẳng chiếu đi qua O (H. 94).

Mặt nón chiếu không bắt buộc phải là mặt nón tròn xoay đỉnh O vuông góc với tâm của hình tròn C, nó có thể là « mặt nón nghiêng ». Tuy nhiên, trong mọi trường hợp (ở đây ta thừa nhận mà không chứng minh) giao của mặt nón với mặt phẳng là một đường cong, phương trình của nó là phương trình bậc hai; đảo lại, mọi đường cong bậc hai đều có thể thu được từ đường tròn nhờ phép chiếu. Chính vì lý do đó mà các đường cong bậc hai còn có tên gọi khác: các thiết diện cônic.

Ta đã nhấn mạnh rằng nếu một mặt phẳng chỉ cắt một « hốc » của hình nón tròn xoay thì giao tuyến E là một elip. Dễ chứng tỏ đường cong E thỏa mãn định nghĩa tiêu điểm thông thường của elip mà ta đã phát biểu ở trên. Ta nêu một chứng minh rất đơn giản và đẹp của nhà toán học Bi Đandêlen đề xuất năm 1822. Ta hình dung hai mặt cầu S_1 và S_2 (H. 95) tiếp xúc với mặt phẳng thiết diện π theo thứ tự tại các điểm F_1 và F_2 và tiếp xúc với mặt nón dọc theo các đường tròn song song K_1 và K_2. Lấy một điểm P tùy ý của đường cong E, vẽ các đoạn PF_1 và PF_2. Sau đó, ta xét đoạn PO

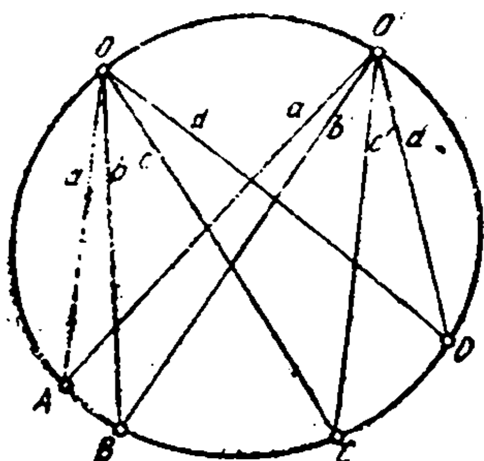


H: 95. Các mặt cầu Đandêlen

nối điểm P với đỉnh O của hình nón, đoạn này nằm hoàn toàn trên mặt nón; gọi Q_1 và Q_2 là các giao điểm của nó với các đường tròn K_1 và K_2. Vì PF_1 và PQ_1 là hai tiếp tuyến vẽ từ điểm P tới mặt cầu S_1, cho nên $PF_1 = PQ_1$. Cũng vậy $PF_2 = PQ_2$. Cộng các đẳng thức này ta được: $PF_1 + PF_2 = PQ_1 + PQ_2$. Nhưng $PQ_1 + PQ_2 = Q_1Q_2$ là khoảng cách trên mặt nón giữa hai đường tròn song song K_1 và K_2: nó không phụ thuộc vào sự lựa chọn điểm P trên đường cong E. Do đó, dù P ở vị trí nào trên E cũng có đẳng thức $PF_1 + PF_2 = const$. Đây chính là định nghĩa tiêu điểm của elip. Như vậy E là elip, còn F_1 và F_2 là các tiêu điểm của nó.

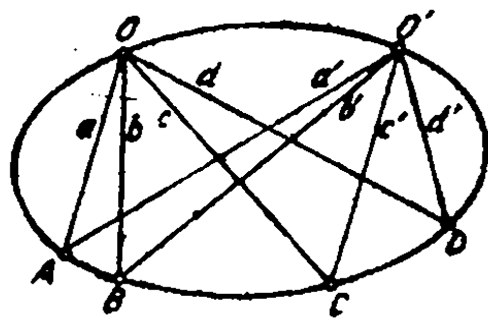
2. Các tính chất xạ ảnh của các thiết diện cônic. Dựa vào các mệnh đề đã chứng minh trong mục trước bây giờ ta thừa nhận tạm thời một định nghĩa sau đây: thiết diện cônic là hình chiếu của đường tròn trên một mặt phẳng. Định nghĩa này đáp ứng nhiều hơn tinh thần của hình học xạ ảnh so với các định nghĩa tiêu điểm đã được thừa nhận rộng rãi, bởi vì những định nghĩa sau này hoàn toàn dựa trên khái niệm mêtric về khoảng cách. Định nghĩa mới cũng không thể hoàn toàn tránh khỏi thiếu sót vì « đường tròn » cũng là một khái niệm mêtric. Nhưng, chúng ta sẽ nhanh chóng đạt tới một định nghĩa thuần túy xạ ảnh của các thiết diện cônic.

Nếu ta thừa nhận các thiết diện cônic là các hình chiếu của đường tròn (nói cách khác, ta hiểu thuật ngữ « thiết diện cônic » là một đường cong thuộc vào lớp xạ ảnh của đường tròn) thì từ đó suy ngay được mỗi tính chất của đường tròn là bất biến đối với các biến đổi xạ ảnh cũng phải là một tính chất của mỗi thiết diện cônic. Bây giờ, ta nhắc lại một tính chất mêtric mà ai cũng biết của đường tròn: « các góc nội tiếp chắn cùng một cung thì bằng nhau ». Trên H. 96 góc AOB



H. 96. Tỉ số kép trên đường tròn.

chắn cung AB không phụ thuộc vào vị trí của điểm O trên đường tròn. Ta liên kết tình trạng đã nêu với khái niệm tỉ số kép bằng cách lấy trên đường tròn không phải hai điểm A, B mà bốn điểm : A, B, C, D. Bốn đường thẳng a, b, c, d nối những điểm đó với điểm O trên đường tròn có tỉ số kép (a, b, c, d) chỉ phụ thuộc vào các góc chắn các cung CA, CB, DA, DB. Nối A, B, C, D với một điểm bất kỳ khác O' của đường tròn ta được các đường thẳng a', b', c', d'. Từ tính chất của đường tròn đã nhấn mạnh ở trên suy ra hai bộ bốn đường thẳng là « toàn đẳng »[1]. Bởi vậy, chúng có cùng một tỉ số kép : (a'b'c'd') = (abcd). Ta chiếu đường tròn lên một thiết diện cônic K : khi đó trên K có một bộ bốn điểm mà một lần nữa ta lại biểu thị bằng : A, B, C, D; hai điểm O và O' và hai bộ bốn đường thẳng a, b, c, d và a', b', c', d'. Hai bộ bốn đường thẳng này đã không còn toàn đẳng bởi vì trong phép chiếu thì nói chung, các góc không được bảo toàn. Nhưng vì tỉ số kép không thay đổi trong phép chiếu cho nên đẳng thức



H. 97. Tỉ số kép trên Elip.

(1) Bộ bốn đường thẳng a, b, c, d được xem là toàn đẳng với bộ bốn đường thẳng khác a', b', c', d' nếu góc của mỗi cặp đường thẳng trong bộ thứ nhất bằng về độ lớn và cùng hướng với góc của cặp đường thẳng tương ứng trong bộ thứ hai.

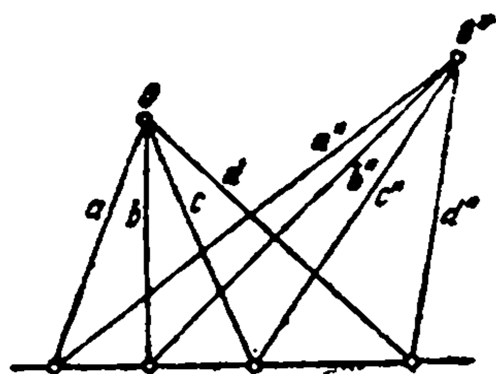
(abcd)=(a'b'c'd') vẫn đúng. Bởi thế, ta đi đến một định lý cơ bản sau đây: Nếu bốn điểm của thiết diện cônic K (A, B, C, D chẳng hạn) được nối với điểm thứ năm O cũng thuộc thiết diện bởi các đường thẳng a, b, c, d thì tỉ số kép (abcd) không phụ thuộc vào vị trí của điểm O trên đường cong K (H. 97).

Đó là một kết quả đặc biệt. Như ta đã biết, nếu bốn điểm A, B, C, D nằm trên một đường thẳng thì tỉ số kép của những đường thẳng nối chúng với điểm thứ năm O sẽ không phụ thuộc vào việc lựa chọn năm điểm này. Đó là một mệnh đề cơ bản của hình học xạ ảnh. Bây giờ thì ta đã biết một khẳng định tương tự cũng đúng với bốn điểm trên một thiết diện cônic K nào đó, song với một hạn chế quan trọng: điểm thứ năm O không được di chuyển tự do trong mặt phẳng mà chỉ có thể di chuyển trên thiết diện Cônic K.

Có thể chứng minh khá dễ dàng định lý đảo dưới dạng sau: Nếu trên đường cong K có hai điểm O và O' sao cho với bốn điểm tùy ý A, B, C, D trên đường cong K mà tỉ số kép tạo bởi các đường thẳng nối những điểm này với O và tỉ số kép tạo bởi các đường thẳng nối những điểm đó với O' bằng nhau thì đường cong K là một thiết diện cônic (theo định lý thuận thì tỉ số kép của các đường thẳng nối bốn điểm cho trước với một điểm bất kỳ O'' trên K có giá trị không đổi). Ở đây, ta không nêu cách chứng minh.

Các tính chất xạ ảnh của các thiết diện cônic đã trình bày ở trên gợi cho ta một phương pháp chung để dựng các đường cong đó theo từng điểm. Ta quy ước hiểu *một chùm đường thẳng* là tập hợp tất cả các đường thẳng trong mặt phẳng đi qua hai điểm O và O' nằm

trên thiết diện cônic K. Giữa các đường thẳng của chùm O và của chùm O' có thể xác định một tương ứng một — một cho ứng đường thẳng a của chùm thứ nhất với đường thẳng thẳng a' của chùm thứ hai nếu như a và a' cắt nhau tại một điểm A nào đó của đường cong K. Khi đó một bộ bốn đường thẳng tùy ý trong chùm O sẽ có cùng tỉ số kép với bộ bốn đường thẳng a', b', c' d' của chùm O'. Mỗi tương ứng một — một giữa hai chùm đường thẳng có tính chất như thế gọi là *một tương ứng xạ ảnh.* (Định nghĩa này là đối ngẫu với định nghĩa tương ứng xạ ảnh giữa các điểm trên hai đường thẳng. Dùng định nghĩa đó, ta có thể khẳng định: *thiết diện cônic K là quỹ tích giao điểm của các đường thẳng tương ứng với nhau thuộc hai chùm nằm trong một tương ứng xạ ảnh.* Định lý này là cơ sở cho định nghĩa thuần túy xạ ảnh sau đây về các thiết diện cônic: Thiết diện cônic là quĩ tích giao điểm các đường thẳng tương ứng thuộc hai chùm nằm trong một tương ứng xạ ảnh. Không đi sâu vào lý thuyết các thiết diện cônic xây dựng trên định nghĩa này, ta chỉ hạn chế ở việc nêu một số chú ý mà thôi:

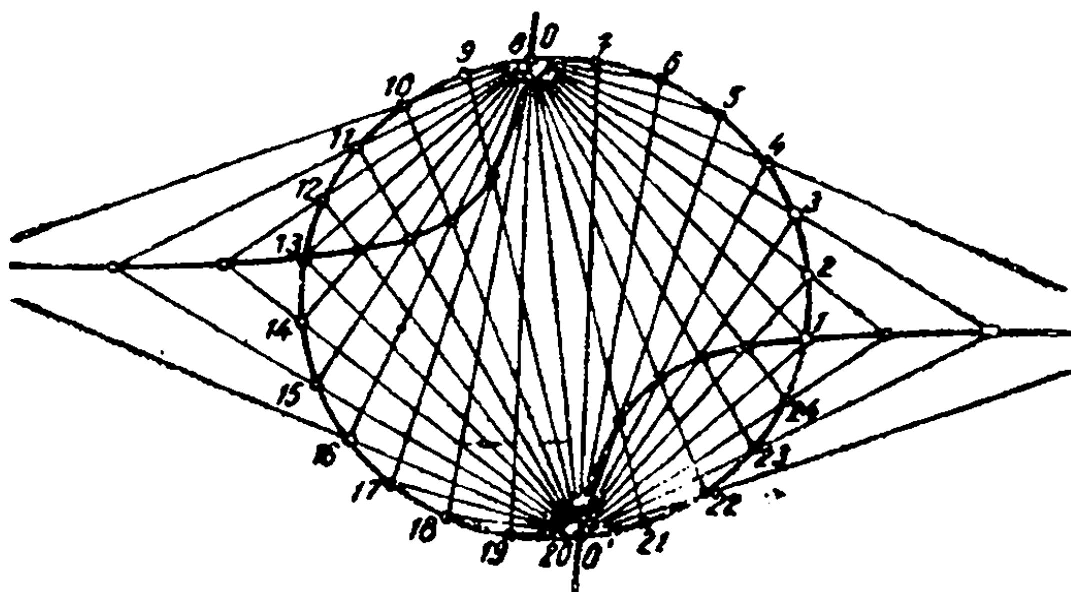


H.98. Đề dựng chùm đường thẳng xạ ảnh

Các cặp chùm đường thẳng nằm trong tương ứng xạ ảnh có thể thu được bằng cách như sau. Từ hai tâm O và O'' khác nhau ta chiếu tất cả các điểm P của một đường thẳng l và xác định một tương ứng một — một

(1) Trong những trường hợp nhất định thì quĩ tích này có thể biến thành đường thẳng (xem H,98).

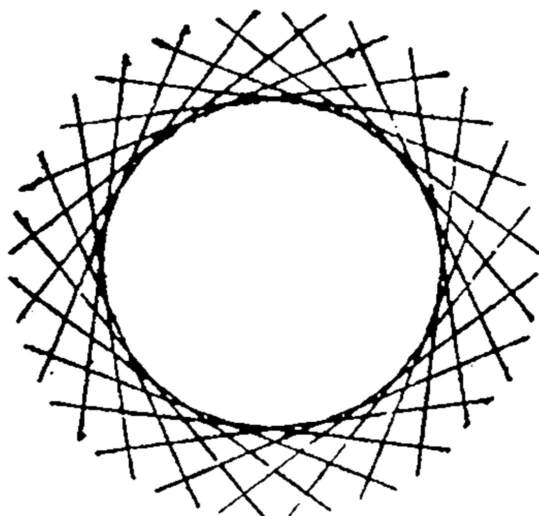
giữa các chùm đang chiếu bằng cách cho ứng với nhau những đường thẳng cắt nhau trên đường thẳng l. Như thế là đủ để các chùm thu được nằm trong một tương ứng xạ ảnh. Sau đó ta lấy chùm O'' và mang nó « như một vật rắn nào đó » tới một vị trí O' tùy ý. Chùm mới O' tất nhiên có tương ứng xạ ảnh với chùm O. Nhưng có điều đặc biệt là, mọi tương ứng xạ ảnh bất kỳ giữa hai chùm đều có thể thu được bằng cách như vậy. Nếu các chùm O và O' là toàn đẳng, ta có một đường tròn. Nếu góc giữa các tia tương ứng trong hai chùm bằng nhau, nhưng tính theo hướng đối nhau thì ta có một hypebol cân (H. 99).



H. 99. Sự tạo thành đường tròn và hyperbol cân nhờ các chùm xạ ảnh

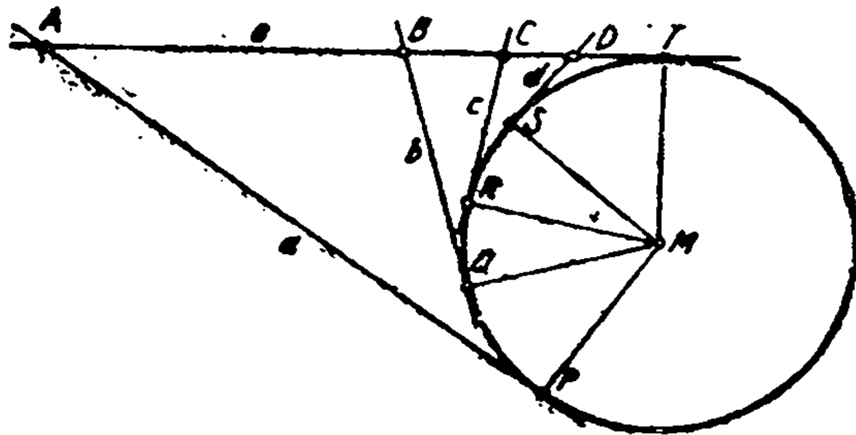
Cần lưu ý rằng định nghĩa vừa nêu về thiết diện cônic, nói riêng, có thể cho một đường thẳng như H. 98. Trong trường hợp này đường thẳng OO'' sẽ tương ứng với chính nó và mọi điểm của nó phải được xem như thuộc quỹ tích phải tìm. Như thế, thiết diện cônic suy biến thành một cặp đường thẳng: tình trạng này hoàn toàn phù hợp với sự kiện tồn tại một thiết diện hình nón gồm có hai đường thẳng (nếu mặt phẳng cắt đi qua đỉnh hình nón)

3. Các thiết diện cônic được xem như « các đường cong kẻ ». Khái niệm tiếp tuyến với thiết diện cônic cũng thuộc vào hình học xạ ảnh bởi vì tiếp tuyến với thiết diện cônic là một đường thẳng chỉ có một điểm chung với thiết diện đó, mà tính chất này được bảo toàn trong phép chiếu. Các tính chất xạ ảnh của tiếp tuyến với thiết diện cônic dựa trên định lý sau đây: *Tỉ số kép của các giao điểm của bốn tiếp tuyến cố định của một thiết diện cônic với tiếp tuyến thứ năm bất kỳ không phụ thuộc vào việc lựa chọn tiếp tuyến thứ năm này.* Chứng minh của định lý này rất đơn giản. Vì một thiết diện bất kỳ là hình chiếu của đường tròn và vì trong định lý cũng chỉ đề cập đến những tính chất là bất biến đối với phép chiếu như vậy, cho nên muốn chứng minh định lý trong trường hợp tổng quát, chỉ cần chứng minh nó cho trường hợp đường tròn.


H. 100. Đường tròn xem như tập hợp các tiếp tuyến.

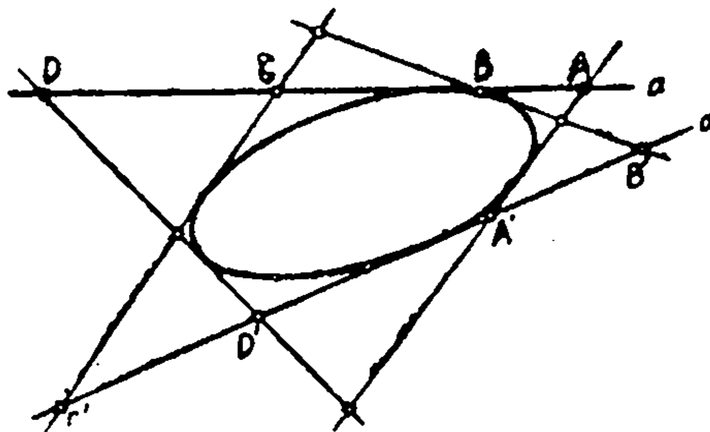
Trong trường hợp cụ thể này, định lý được chứng minh bằng hình học sơ cấp. Giả thử P, Q, R, S là bốn điểm ở trên một đường tròn K; a, b, c, d là các tiếp tuyến tại những điểm đó; T là một điểm tùy ý khác trên đường tròn; O là tiếp tuyến tại điểm đó. Giả thử A, B, C, D là giao điểm của tiếp tuyến O với các tiếp tuyến a, b, c, d. Nếu M là tâm của đường tròn thì tất nhiên $\widehat{TMA} = \frac{1}{2}\widehat{TMP}$; đẳng thức này biểu thị góc nội tiếp trong K chắn cung TP. Cũng vậy $\widehat{TMB}$ là góc nội tiếp trong

K chắn cung TQ do đó: số đo $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ số đo $\widehat{PQ}$ Từ đó thấy rằng, A, B, C, D được chiếu từ M bởi bốn đường thẳng mà góc giữa chúng chỉ phụ thuộc vào vị trí các điểm P, Q, R, S. Nhưng khi đó thì tỉ số kép (ABCD) chỉ phụ thuộc vào bốn tiếp tuyến a, b, c, d mà không phụ thuộc tiếp tuyến O. Đó là điều cần chứng minh.



H. 101. Tính chất của tiếp tuyến với đường tròn

Trong mục trước, ta đã có dịp chứng tỏ rằng có thể dựng một thiết diện cônic « theo từng điểm » nếu ghi lại các giao điểm của các đường thẳng tương ứng thuộc hai chùm có một tương ứng xạ ảnh. Định lý vừa chứng minh giúp ta phát biểu một định lý đối ngẫu. Lấy hai tiếp tuyến a và a' của thiết diện cônic K. Giả thử tiếp tuyến thứ ba cắt a và a' theo thứ tự ở A và A'. Nếu di chuyển theo

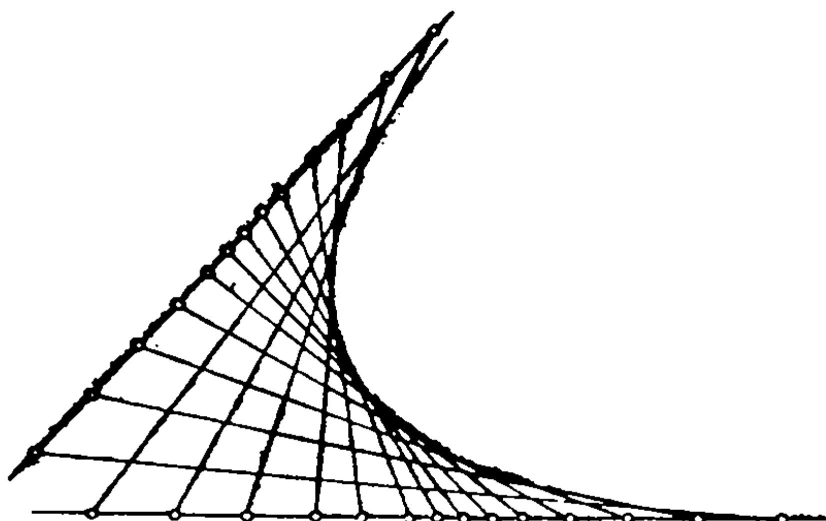


H. 102. Các dãy điểm xạ ảnh trên hai tiếp tuyến của elip.

đường cong thì một tương ứng A ⇔ A' được xác lập. Tương ứng này là xạ ảnh vì, theo định lý đã chứng minh thì bộ bốn điểm bất kỳ trên a sẽ có cùng tỉ số kép với bộ bốn tương ứng trên a'. Suy ra, thiết diện cônic K được xem như « tập hợp các tiếp tuyến của nó » gồm các đường thẳng nối các điểm tương ứng với nhau thuộc hai dãy[1] điểm ở trên a và ở trên a' trong một tương ứng xạ ảnh.

Sự kiện này cho phép ta đưa ra một định nghĩa mới về các thiết diện cônic xem như « các đường cong kẻ ». Ta hãy so sánh định nghĩa này với định nghĩa xạ ảnh trước đây:

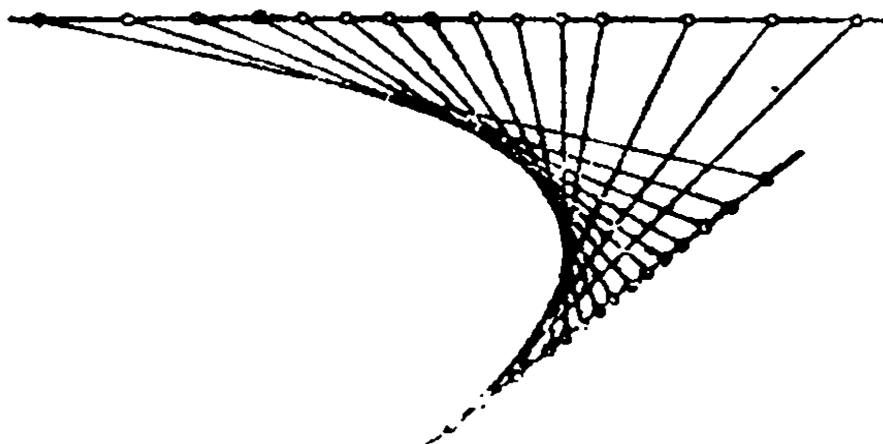
I	II
Thiết diện cônic được xem như tập hợp *các điểm, gồm các giao điểm của các đường thẳng tương ứng nhau* thuộc hai *chùm* xạ ảnh.	Thiết diện cônic được xem như « tập hợp các *đường thẳng* » gồm *các đường thẳng nối các điểm tương ứng nhau* trong hai *dãy* xạ ảnh.



H. 103. Parabol xác định bởi các dãy điểm toàn đẳng

(1) Tập hợp điểm trên một đường thẳng được gọi là một *dãy điểm*. Khái niệm này đối ngẫu với khái niệm chùm đường thẳng.

Nếu ta coi tiếp tuyến với thiết diện cônic tại một điểm nào đó của nó là phần tử đối ngẫu với bản thân điểm đó và hơn nữa, nếu ta qui ước cho tương ứng



H. 104. Parabol xác định bởi các dãy điểm đồng dạng

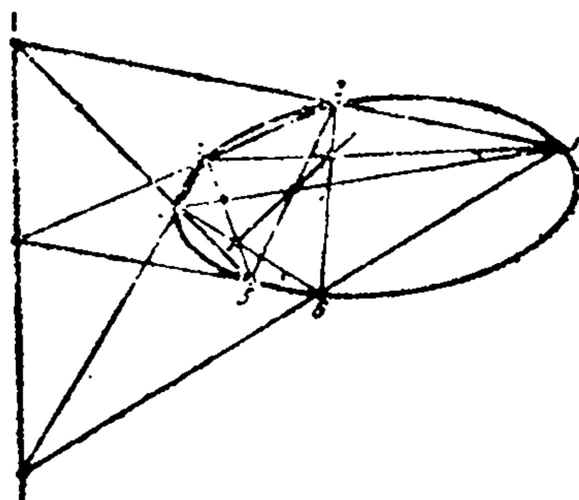
(trên cơ sở đối ngẫu) « đường cong kẻ » (tạo bởi tập hợp tiếp tuyến) với « đường cong điểm » (tạo bởi tập hợp điểm) thì các cách diễn đạt trên sẽ là hoàn hảo về mặt nguyên tắc đối ngẫu. Khi « phiên dịch » một cách diễn đạt này sang một cách diễn đạt khác bằng cách thay thế mọi khái niệm bằng các khái niệm đối ngẫu tương ứng thì « thiết diện cônic » vẫn không đổi: tuy rằng trong trường hợp này thì nó được coi là « một đường cong điểm » được xác định bởi các điểm của nó, trong trường hợp khác thì nó được coi là « một đường cong kẻ » được xác định bởi các tiếp tuyến của nó.

Suy ra hệ quả quan trọng sau đây: nguyên tắc đối ngẫu, ban đầu được xác lập trong hình học xạ ảnh của mặt phẳng chỉ cho các điểm và đường thẳng, đã có thể mở rộng cả cho các thiết diện cônic. *Nếu trong diễn đạt của một định lý nào đó đề cập đến các điểm, các đường thẳng và các thiết diện cônic ta thay thế mỗi phần tử bằng một phần tử đối ngẫu với nó* (không nên quên rằng một điểm của thiết diện cônic phải cho tương ứng với

tiếp tuyến với thiết diện đó) thì *sẽ thu được một định lý đúng*. Ta đã gặp thí dụ về sự thực hiện nguyên tắc đó trong mục 4 chương này.

Phép dựng các thiết diện cônic được xem như « các đường cong kẻ » đã được chỉ rõ trên hình 103 — 104. Đặc biệt, nếu trong hai dãy điểm xạ ảnh mà các điểm xa vô tận tương ứng với nhau (điều này sẽ là chắc chắn nếu các dãy điểm là toàn đẳng hoặc đồng dạng[1] với nhau) thì thiết diện cônic sẽ là parabol; điều ngược lại cũng đúng.

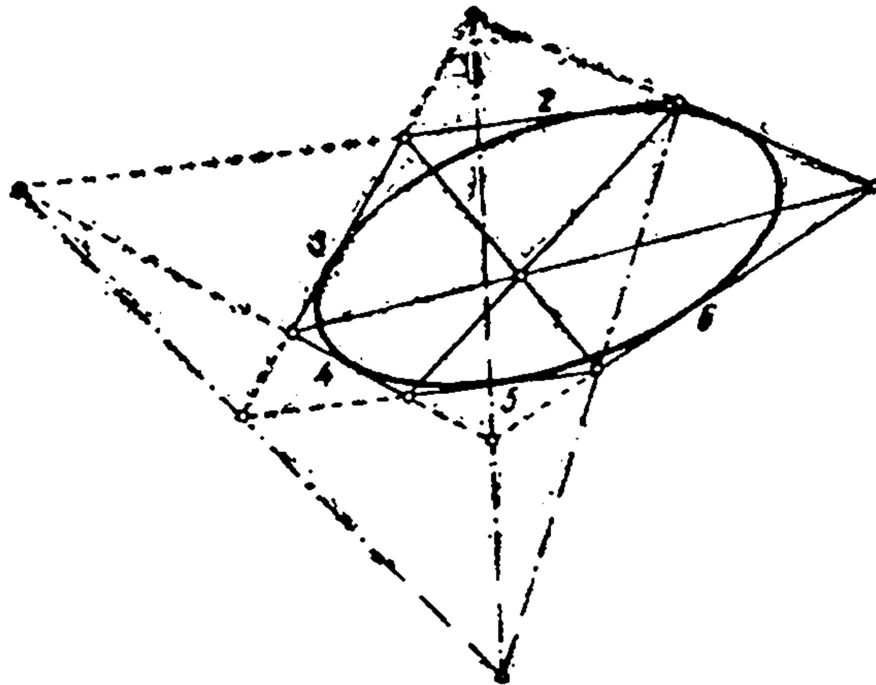
4. Định lý Paxcal và Briansôn tổng quát cho trường hợp thiết diện cônic tùy ý. Một trong những thể hiện tốt nhất của nguyên tắc đối ngẫu ứng dụng vào thiết diện cônic là quan hệ tương hỗ giữa các định lý Paxcal và Briansôn tổng quát. Định lý thứ nhất được phát hiện năm 1640, định lý thứ hai — năm 1806. Tuy nhiên, định lý này là hệ quả trực tiếp của định lý kia, bởi vì mỗi định lý mà diễn đạt của nó chỉ nói đến các thiết diện cônic, đường thẳng và điểm chắc chắn sẽ còn đúng nếu ta thay đổi cách diễn đạt theo nguyên tắc đối ngẫu.



H. 105. Cấu hình Paxcal tổng quátHai trường hợp : một cho lục giác 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; một cho lục giác 1, 3, 5, 2, 6, 4.

(1) Khái niệm các dãy điểm « toàn đẳng » và « đồng dạng » với nhau đã đủ rõ, không cần giải thích thêm.

Các định lý đã chứng minh trong § 5 (cũng với những tên gọi như vậy) chính là « những trường hợp suy biến» của hai định lý tổng quát hơn sau đây:



H. 106. Cấu hình Briansôn tổng quát
Có hai trường hợp.

Định lý Paxcal. Các cạnh đối của một hình lục giác nội tiếp trong một thiết diện cônic cắt nhau tại ba điểm thẳng hàng.

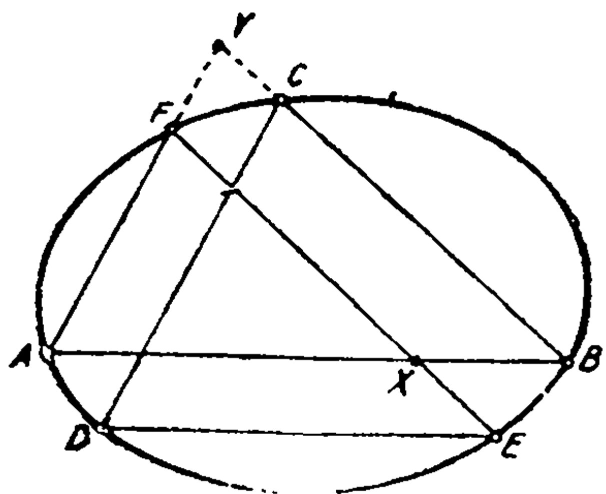
Định lý Briansôn. Ba đường cheo nối các đỉnh đối diện của một hình lục giác ngoại tiếp một thiết diện cônic thì đồng qui.

Tất nhiên, hai định lý này có nội dung xạ ảnh, ta nhận thấy ngay được tính đối ngẫu của chúng nếu diễn đạt chúng như sau:

Định lý Paxcal. Cho sáu điểm 1, 2, 3, 4, 5, 6 trên một thiết diện cônic. Nối các điểm liên tiếp bởi các đường thẳng (1,2), (2,3), (3, 4), (4,5), (5,6), (6,1). Đánh dấu giao điểm của các đường thẳng (1,2) và (4,5), (2,3) và (5,6), (3,4) và (6,1). Ba điểm đó nằm trên một đường thẳng.

Định lý Brianxôn. Cho sáu tiếp tuyến 1, 2, 3, 4, 5, 6 với một thiết diện cônic. Các tiếp tuyến liên tiếp cắt nhau tại các điểm (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,1). Vẽ các đường thẳng nối các điểm (1,2) và (4,5), (2,3) và (5,6), (3,4) và (6,1). Ba đường thẳng này cắt nhau tại một điểm.

Chứng minh được thực hiện bằng một phép đặc biệt hóa giống như đã làm trong các trường hợp suy biến đã xét trước kia. Ta hãy chứng minh định lý Paxcal. Giả thử A, B, C, D, E, F là các đỉnh của lục giác nội tiếp trong thiết diện cônic K. Bằng phép chiếu ta có thể làm cho các đường thẳng AB và ED, FA và CD song song với nhau (khi đó ta có cấu hình biểu thị trên H.107; để cho tiện, lục giác trên hình vẽ là tự cắt, mặc dù điều này không cần thiết). Bây giờ chỉ cần chứng minh đường thẳng CB song song với đường thẳng FE, nói cách khác, cạnh đối cắt nhau trên đường thẳng xa vô tận. Để chứng minh, ta xét bốn điểm F,A,B,D mà như ta đã biết, giữ nguyên tỉ số kép (k_1 chẳng hạn) trong phép chiếu từ một điểm K bất kỳ. Chiếu từ điểm C lên đường thẳng AF, ta được bốn điểm F,A,Y, ∞ với

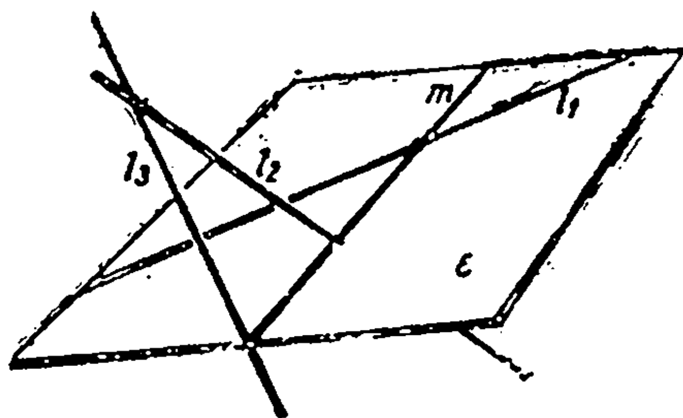


H. 107. Chứng minh định lý Paxcal.

$k = (F,A,Y,\infty) = \frac{YF}{YA}$. Bây giờ, chiếu từ điểm E lên đường thẳng BA, ta được bốn điểm X,A,B, ∞ với $k = (X, A, B, \infty) = \frac{BX}{BA}$. Như vậy, $\frac{BX}{BA} = \frac{YE}{YA}$, chứng tỏ

YB//FX. Chứng minh kết thúc. Định lý Briansòn suy ra từ định lý Paxcal theo nguyên tắc đối ngẫu. Tuy nhiên có thể chứng minh nó trực tiếp bằng lập luận đối ngẫu với lập luận vừa nêu. Việc tiến hành chi tiết lập luận này là một bài tập hay đối với bạn đọc.

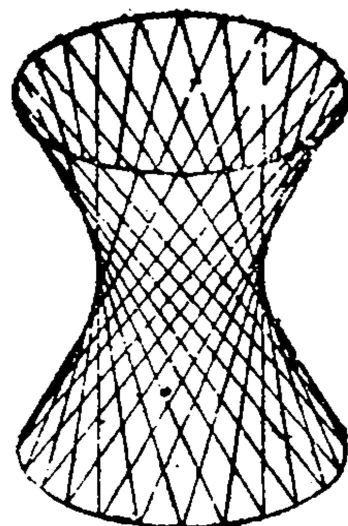
5. Hypeboloid. Trong không gian ba chiều, ta thường gặp các mặt quadric (mặt bậc hai) cũng có vai trò như các thiết diện cônic (đường cong bậc hai) trong mặt phẳng. Đơn giản nhất là mặt cầu và elipxoid. Các quadric đa dạng hơn thiết diện cônic, việc nghiên cứu chúng có nhiều khó khăn. Ta xét qua và không chứng minh một mặt quadric đáng chú ý nhất được gọi là hypeboloid liên thông (hoặc một tầng). Có thể thu được mặt này bằng cách sau. Trong không gian, lấy ba đường thẳng l_1, l_2, l_3 có vị trí tổng quát, có nghĩa là không có hai đường thẳng nào song song với nhau và cả ba đường không cùng song song với một mặt phẳng. Tồn tại tập hợp vô số đường thẳng trong không gian cắt cả ba đường thẳng đã cho; ta sẽ chứng minh điều này. Giả thử π là một mặt phẳng tùy ý chứa đường thẳng l_1, mặt phẳng này cắt các đường thẳng l_1 và l_2 tại hai điểm. Một đường thẳng m đi qua hai điểm này, tất nhiên sẽ cắt cả ba đường thẳng l_1, l_2 và l_3 đã cho. Khi mặt phẳng quanh quay l_1 thì đường thẳng m sẽ



H.108. Dựng các đường thẳng cắt 3 đường thẳng cho trước có vị trí tổng quát.

thay đổi vị trí của nó nhưng bao giờ cũng vẫn cắt ba đường thẳng cho trước. Khi m chuyển động, nó sinh ra một mặt đi ra xa vô tận, mặt đó được gọi là hypeboloid một tầng. Mặt này chứa một tập hợp vô số đường thẳng như đường thẳng m. Ba đường thẳng tùy ý như thế (m_1, m_2, m_3 chẳng hạn) cũng sẽ có vị trí tổng quát và những đường thẳng trong không gian cắt ba đường thẳng m_1, m_2 và m_3 cũng đồng thời nằm trên mặt đang xét. Từ đó rút ra một tính chất cơ bản của hypeboloid: nó gồm hai họ đường thẳng khác nhau; cứ mỗi bộ ba đường thẳng của cùng một họ sẽ có vị trí tổng quát và mỗi đường thẳng của một họ sẽ cắt tất cả các đường thẳng của họ khác.

Tính chất xạ ảnh quan trọng của hypeboloid là tỉ số kép của bốn điểm, tại đó một bộ bốn đường thẳng cho trước của một họ cắt một đường thẳng nào đó của họ kia, sẽ không phụ thuộc vào việc chọn đường thẳng thứ năm này. Khẳng định này rút ra từ phương pháp dựng hypeboloid nhờ mặt phẳng quay. Bạn đọc có thể chứng minh điều này để luyện tập.



H. 109. Hypeboloid

Ta còn lưu ý thêm một tính chất nữa của hypeboloid: tuy nó chứa hai họ đường thẳng, nhưng sự tồn tại những đường thẳng như thế không làm trở ngại đến sự cong của mặt — không làm cho nó bị cứng. Nếu làm mô hình hypeboloid bằng những thanh có thể quay tự do xung quanh các giao điểm của chúng thì toàn bộ mặt có thể liên tục biến dạng, lấy vô số những trạng thái khác nhau.

§ 9. HỆ TIÊN ĐỀ VÀ HÌNH HỌC PHI ƠCLID

1. Phương pháp tiên đề. Phương pháp tiên đề trong toán học ít nhất đã bắt đầu từ thời Ơclid. Rất có thể tưởng lầm là toán học cổ xưa đã được phát triển hoặc trình bày dưới hình thức định đề chặt chẽ vốn có của « Khởi đầu ». Tuy nhiên ấn tượng của tập sách đó đối với các thế hệ sau lớn đến nỗi nó đã trở thành mẫu mực cho mọi chứng minh chặt chẽ trong toán học. Thậm chí có khi các nhà triết học (chẳng hạn Xpinôza trong « Ethica, more geometrico demonstrata ») đã định trình bày lập luận dưới hình thức các định lý suy ra từ các định nghĩa và tiên đề. Trong toán học hiện đại, sau thời kỳ đi chệch khỏi truyền thống Ơclid kéo dài trong khoảng thế kỷ XVII và XVIII, đã một lần nữa thấy rõ sự thâm nhập mạnh mẽ của phương pháp tiên đề trong những lĩnh vực khác nhau. Một trong những sản phẩm mới nhất của sự tăng cường suy nghĩ theo hướng này là sự ra đời của một ngành mới — logic toán.

Trên những nét khái quát thì quan điểm tiên đề có thể được đặc trưng như sau. Chứng minh một định lý trong một hệ thống suy diễn nào đó tức là xác nhận rằng định lý đó là hệ quả logic tất yếu của những mệnh đề khác đã được chứng minh trước đó; những mệnh đề này, đến lượt nó cũng phải được chứng minh v.v... Như vậy, quá trình lập luận toán học đã dẫn đến một bài toán « xuống thang vô tận » và không thể thực hiện được nếu như không dừng lại ở một chỗ nào đấy. Cuối cùng phải có một số nào đó các khẳng định gọi là những *định đề* hoặc những *tiên đề* được thừa nhận là đúng không phải chứng minh. Từ đó có thể suy ra mọi định lý khác bằng con đường lập luận thuần túy logic. Nếu như mọi sự kiện của một lĩnh vực khoa học nào đó

được qui về một trật tự logic như thế, tức là, một sự kiện bất kỳ « được suy ra » từ một số mệnh đề đã được lựa chọn (giả thiết rằng số mệnh đề như vậy là hữu hạn, chúng đơn giản và dễ nhận thức) thì có cơ sở để nói rằng lĩnh vực đó đã được biểu hiện dưới « hình thức tiên đề » hoặc đã được « tiên đề hóa ». Việc lựa chọn các mệnh đề — tiên đề có mức độ rộng rãi tùy ý. Song thật là kém bổ ích nếu các tiên đề không đơn giản và số lượng quá nhiều. Ngoài ra, hệ tiên đề phải *tương thích* (*phi mâu thuẫn*) với ý nghĩa là từ hệ đó không thể suy ra hai định lý chứa mâu thuẫn với nhau, phải *đầy đủ* với ý nghĩa là mọi định lý đúng trong lĩnh vực đang xét phải suy ra được từ hệ đó. Cũng cần làm cho hệ tiên đề là *độc lập* tức là không có tiên đề nào là hệ quả logic của những tiên đề còn lại. Vấn đề về tính phi mâu thuẫn và tính đầy đủ của một hệ tiên đề là đề tài của những cuộc thảo luận lớn. Những tư tưởng triết học khác nhau về nguồn gốc kiến thức nhân loại đã qui định những quan điểm khác nhau, không thống nhất với nhau, về cơ sở của toán học. Nếu các khái niệm toán học được xem như các đối tượng chủ thể trong phạm vi « trực giác thuần túy » là độc lập với các định nghĩa và những thao tác khác nhau của hoạt động tư duy con người thì tất nhiên, không thể tồn tại một mâu thuẫn nào ở trong các kết quả toán học vì chúng là những mệnh đề chân lý khách quan mô tả thế giới có thực. Nếu xuất phát từ quan điểm như vậy thì nói chung không có vấn đề về tính mâu thuẫn. Nhưng tiếc thay, nội dung thực của toán học lại không thể đặt trong khuôn khổ triết học đơn giản như vậy. Những đại biểu của chủ nghĩa trực giác toán học hiện đại không dựa vào trực giác thuần túy với đầy đủ ý nghĩa Kant của nó. Họ thừa nhận cái vô hạn đếm được như là con đẻ hợp

pháp của trực giác nhưng lại chỉ cho phép dùng những tính chất có tính chất kiến thiết. Theo quan điểm của họ, các khái niệm cơ sở như continum số phải loại trừ không được dùng, phải hy sinh đi những phần quan trọng của toán học hiện tại (cái gì còn lại sau đó là cực kỳ phức tạp, không có hy vọng gì đơn giản hóa).

« Những người theo chủ nghĩa hình thức » giữ một lập trường hoàn toàn khác. Họ không gán cho các khái niệm toán học một thực tại trực giác nào và không khẳng định các tiền đề biểu thị cho những chân lý khách quan nào đó thuộc về các sự vật của trực giác thuần túy; họ (những người theo chủ nghĩa hình thức) chỉ chú ý đến sự đúng đắn logic hình thức của quá trình lập luận dựa vào các tiên đề. Lập trường này có ưu điểm hơn so với lập trường của chủ nghĩa trực giác vì nó trao cho toán học quyền tự do hoàn toàn hành động cần thiết cho lý thuyết cũng như cho ứng dụng. Nhưng đồng thời nó buộc các nhà hình thức chủ nghĩa phải chứng minh rằng những tiên đề mà họ thừa nhận, bây giờ là sản phẩm của sự sáng tạo tự do của trí tuệ con người, không thể dẫn tới mâu thuẫn. Trong vòng 20 năm gần đây đã có nhiều cố gắng tìm kiếm các chứng minh như vậy về sự phi mâu thuẫn, đặc biệt đối với các tiên đề số học và đại số và đối với khái niệm continum số. Các kết quả thu được theo hướng này có tầm quan trọng đặc biệt, nhưng toàn bộ bài toán còn xa chưa thực hiện được. Hơn nữa, các kết quả thu được trong những năm gần đây đã chứng tỏ rằng những ý định như vậy không thể thành công hoàn toàn — đối với những hệ thống các khái niệm định nghĩa chặt chẽ, đóng kín thì nói chung không thể chứng minh chúng là phi mâu thuẫn và đầy đủ. Một điều đặc biệt quan trọng là, mọi lập luận đề cập đến các vấn đề

lý giải kiểu như thế phải được thực hiện bằng các phương pháp kiến thiết và có sức thuyết phục bằng trực giác.

Cuộc tranh cãi giữa những người trực giác và hình thức chủ nghĩa trở nên đặc biệt gay go nhân vấn đề về các nghịch lý của lý thuyết tập hợp, đã đẻ ra một khối lượng lớn các bài diễn văn say sưa của những người trung thành nhất thuộc cả hai trường phái. Thế giới toán học rung lên những tiếng kêu gào « khủng hoảng cơ sở ». Song những tín hiệu báo động đó đã không được tiếp nhận.

Với tất cả sự trân trọng những thành tựu giành được trong cuộc đấu tranh cho sự hoàn toàn rõ ràng của các cơ sở thì kết luận cho rằng những sự bất đồng về tư tưởng hoặc ngay cả những nghịch lý, nảy sinh ra do sự sử dụng theo thói quen và yên tâm khái niệm về sự khái quát vô hạn, chứa đựng trong bản thân nó mối đe dọa nghiêm trọng đến sự tồn tại của toán học, là hoàn toàn không có cơ sở.

Hoàn toàn độc lập với bất cứ những xét đoán triết học nào và với sự quan tâm đến các vấn đề cơ sở, cách xử lý tiên đề đối với đối tượng của toán học là một phương pháp tự nhiên nhất để làm bộc lộ tất cả những rắc rối trong mối liên hệ tương hỗ giữa các sự kiện khác nhau và giải thích rõ những qui luật của cấu trúc logic kết hợp những lý thuyết của chúng. Đã từng thấy rằng một sự tập trung chú ý như vậy vào cấu trúc hình thức mà không chú ý vào ý nghĩa trực giác của các khái niệm đã làm dễ dàng cho sự tìm kiếm những khái quát và ứng dụng dễ bị bỏ qua trong cách xử lý có tính chất trực giác nhiều hơn đối với sự việc. Nhưng chỉ trong trường hợp đặc biệt thì những phát minh xuất sắc và sự nhận thức chân thực mới là kết quả của việc áp dụng các phương pháp tiên đề thuần túy.

Nguồn gốc chân thực của phát triển toán học là sự suy nghĩ sáng tạo được củng cố bởi trực giác. Nếu coi tiên đề hóa là một tư tưởng mà toán học hướng tới thì sẽ mắc phải một sai lầm không tha thứ được khi cho rằng hệ tiên đề *tự nó* là bản chất của toán học. Trực giác có sáng tạo, có kiến thiết của toán học sẽ mang đến cho toán học những thời điểm không suy diễn và phi lý, xem toán học như âm nhạc hoặc hội họa.

Thời Ơclid, hình học luôn luôn là mẫu mực của một môn học được tiên đề hóa. Trong khoảng nhiều thế kỷ, hệ định đề Ơclid đã là đối tượng của sự nghiên cứu căng thẳng. Song cách đây không lâu người ta đã thấy rất rõ là các định đề này phải được thay đổi, bổ sung, mới có thể đảm bảo suy ra được các mệnh đề của hình học sơ cấp bằng suy diễn. Thí dụ, cuối thế kỷ trước khi xem xét thứ tự sắp xếp của các điểm trên đường thẳng tức là quan hệ đặc trưng bởi từ « ở giữa » Paso đã phát hiện ra cần phải có một tiên đề riêng. Paso đã nêu ra mệnh đề sau đây làm tiên đề : *Nếu một đường thẳng cắt một cạnh của tam giác tại một điểm không phải là đỉnh thì nó sẽ còn cắt một cạnh nữa của tam giác* (sự bỏ qua chi tiết này sẽ dẫn tới một loạt các nghịch lý, chẳng hạn, « chứng minh » mọi tam giác đều cân dường như được suy ra chặt chẽ từ các tiên đề Ơclid ; kết luận này dựa trên việc vẽ hình không chính xác, một số đường thẳng cắt nhau ở phía ngoài của tam giác hoặc hình tròn, trong khi đó thì thực ra chúng phải cắt nhau ở bên trong).

Trong cuốn sách nổi tiếng của mình « Grundlagen der Geometrie »[1] (bản in đầu tiên ra đời năm 1899) *Hinbe* đã nêu ra một hệ tiên đề hình học, đồng thời đã tiến hành phân tích cặn kẽ tính độc lập, tính phi mâu thuẫn và tính đầy đủ của các tiên đề đó.

(1) Tiếng Đức : « Cơ sở hình học » — ND.

Trong mọi hệ tiên đề thường không tránh khỏi phải đưa ra một số khái niệm không định nghĩa; thí dụ khái niệm « điểm » hoặc « đường thẳng » trong hình học. « Ý nghĩa » của chúng (hoặc mối liên hệ với các sự vật của thế giới thực tại) là không quan trọng *đối với toán học*. Những khái niệm đó phải được thừa nhận một cách trừu tượng thuần túy và các tính chất toán học của chúng trong khuôn khổ của hệ suy diễn là hoàn toàn suy ra được từ những quan hệ giữa chúng đã được khẳng định trong các tiên đề. Chẳng hạn, hình học xạ ảnh bắt đầu bằng những khái niệm cơ bản « điểm » và « đường thẳng », từ quan hệ « liên thuộc » và từ hai tiên đề đối ngẫu: « hai đường thẳng khác nhau bất kỳ thì liên thuộc với một và chỉ một điểm » và « hai điểm khác nhau bất kỳ thì liên thuộc với một và cùng một đường thẳng ». Trong hệ tiên đề của hình học xạ ảnh thì tính chất đối ngẫu trong việc diễn đạt các tiên đề sẽ qui định tính đối ngẫu trong bản thân cấu trúc của nó. Mỗi định lý, chỉ chứa những phần tử đối ngẫu trong diễn đạt và trong chứng minh, sẽ tương ứng với một định lý đối ngẫu. Quả vậy, chứng minh của định lý ban đầu là việc áp dụng liên tiếp những tiên đề nào đó; còn việc áp dụng các tiên đề đối ngẫu cũng theo thứ tự đó sẽ hợp thành chứng minh của định lý đối ngẫu.

Tập hợp các tiên đề hình học sẽ tạo nên *định nghĩa không tường minh* của mọi khái niệm hình học « không định nghĩa » như « điểm », « đường thẳng », « tính liên thuộc » v.v... Đối với các ứng dụng của hình học thì điều quan trọng là làm sao cho các khái niệm cơ bản và các tiên đề hình học phù hợp tốt với các khẳng định mà trên đó thực hiện được các phép thử vật lý học đề cập đến những đối tượng « có thực » sờ mó được. Tính thực tại vật lý đứng sau khái niệm điểm là một sự vật

nào đó rất nhỏ giống như một vết tiếp xúc nhỏ của đầu bút chì trên tờ giấy. Cũng vậy, « đường thẳng » là sự trừu tượng hóa của một sợi dây mảnh căng thẳng hoặc của một tia sáng. Tính chất đó của những điểm và đường thẳng vật lý có thể xác nhận được bằng các phép thử, sẽ phù hợp một phần với các tiên đề hình học hình thức. Dễ thấy rằng những thí nghiệm chính xác hơn có thể là lý do cần thiết phải thay đổi các tiên đề nếu như ta muốn chúng mô tả đầy đủ các hiện tượng vật lý. Ngược lại, nếu có sự sai biệt rõ của các hệ tiên đề hình thức với các tính chất vật lý học của các sự vật thì hình học được xây dựng trên các tiên đề đó sẽ có một ý nghĩa giới hạn. Bởi thế, ngay cả với quan điểm của chủ nghĩa hình thức, còn có một cái gì đó có ảnh hưởng lớn đến phương hướng của tư tưởng toán học hơn là trí tuệ con người.

2. Hình học phi Ơclid hypebolic. Trong Ơclid có một tiên đề mà, đối chiếu với những dữ kiện thực nghiệm (với các sợi dây căng thẳng hoặc các tia sáng), không thể nói được nó có « đúng » hay không. Đó là *tiên đề song song* nổi tiếng khẳng định qua một điểm cho trước ở ngoài một đường thẳng cho trước có thể vẽ *một và chỉ một* đường thẳng song song với đường thẳng đã cho. Tính chất độc đáo của tiên đề này là nó khẳng định tính chất của đường thẳng *trên toàn bộ chiều dài của nó*, trong đó đường thẳng được coi là kéo dài vô hạn về cả hai phía: nói rằng hai đường thẳng là song song tức là khẳng định chúng không thể có điểm chung dù kéo dài chúng đến đâu. Trái lại thì một điều hoàn toàn hiển nhiên là, trong giới hạn của một phần *hạn chế* nào đó của mặt phẳng, dù phần đó có rộng đến đâu, cũng có thể vẽ được một tập hợp đường thẳng đi qua một điểm cho trước và không cắt một đường thẳng cho trước. Bởi vì độ dài lớn nhất có thể được

của thước kẻ, của sợi dây, thậm chí của tia sáng được nhìn bằng kính viễn vọng cũng còn là hữu hạn và bởi vì bên trong một hình tròn có bán kính hữu hạn cũng có một tập hợp các đường thẳng đi qua một điểm cho trước ở trong hình tròn không cắt một đường thẳng cho trước, cho nên không thể kiểm tra bằng thực nghiệm tiên đề Ơclid được. Mọi tiên đề khác của Ơclid đều có tính chất hữu hạn, tức là đề cập đến những đoạn thẳng hữu hạn hoặc những bộ phận hữu hạn của các hình phẳng. Sự kiện mà tiên đề song song không kiểm tra được bằng thực nghiệm đã đề lên hàng đầu vấn đề nó có *độc lập* với các tiên đề khác hay không. Nếu nó là hệ quả logic tất yếu của các tiên đề khác thì chỉ cần loại nó ra khỏi số các tiên đề và chứng minh nó như một định lý nhờ các tiên đề Ơclid khác. Các nhà toán học đã cố gắng tìm chứng minh đó trong nhiều thế kỷ qua. Việc này đã tạo nên một nhận thức lờ mờ trong nhiều người nghiên cứu hình học là, phải chăng tiên đề song song khác biệt về cơ bản với các tiên đề còn lại, nó chưa có một tính trực giác có tính chất thuyết phục mà tính trực quan này dường như phải có đối với mọi mệnh đề được coi là tiên đề. Một trong những cố gắng đầu tiên theo hướng đó đã được Prôklơ, một nhà bình luận của Ơclid, thực hiện vào thế kỷ IV. Để không phải đưa vào một tiên đề riêng về đường thẳng song song, ông đã đưa vào *một định nghĩa* mà theo định nghĩa đó thì một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước là quĩ tích của những điểm cách đường thẳng này một khoảng không đổi cho trước. Ở đây Prôklơ đã không để ý rằng làm như vậy thì khó khăn sẽ không được giải quyết mà chỉ dời chỗ đi, bởi vì công trình của ông chưa chứng minh được quĩ tích nêu trên thực sự là một đường thẳng. Vì Prôklơ đã không thể chứng minh được điều sau cùng này, cho

nên ông đã thừa nhận mệnh đề đó là tiên đề song song. Như thế, ta không được lợi lộc gì vì ta có thể chứng tỏ rằng cả hai tiên đề vừa nêu là tương đương với nhau. Xakhêri (1667 — 1733), sau đó là Lambe (1728 — 1777) đã định chứng minh tiên đề song song bằng con đường gián tiếp với một giả thiết đối lập rồi từ đấy suy ra các hệ quả vô lý. Song các hệ quả suy ra được đều không vô lý: đó là những định lý của hình học phi Ơclid mà sau này ta đã tìm được. Nếu những nhà toán học nói trên không xem những kết quả của mình là phi lý mà xem chúng như là những khẳng định không có mâu thuẫn nội tại thì chính họ chứ không phải người nào khác, sẽ có công phát hiện ra hình học phi Ơclid.

Nhưng ở thời đó thì một hệ hình học bất kỳ, không phù hợp tuyệt đối với hình học Ơclid, bị xem như một điều vô lý tất nhiên. Kant, một nhà triết học có uy tín nhất thời bấy giờ đã biểu thị thái độ của mình đối với vấn đề đó bằng cách khẳng định rằng các tiên đề Ơclid không có gì khác là các hình thức tất yếu của tư duy con người, theo ông thì điều đó đã giải thích ý nghĩa khách quan của chúng đối với không gian « có thực ». Niềm tin vào các tiên đề Ơclid như niềm tin vào những chân lý bất di bất dịch tồn tại trong phạm vi trực giác thuần túy như thế, là một trong những giáo điều của triết học Kant. Song, dần dà thì những thói quen sâu sắc của tư duy và ảnh hưởng của các quyền uy triết học không thể đè nén một niềm tin đang phát triển cho rằng sự thất bại trong việc tìm kiếm chứng minh của tiên đề song song ở phía các nhà hình học thì ít mà ở phía bản thân tiên đề là thực sự *độc lập* với các tiên đề khác thì nhiều (cũng tương tự như sự thất bại trong việc giải phương trình bậc năm tổng quát đã dẫn đến điều ngờ vực không thể giải được phương trình đó mà về sau đã được xác minh là đúng). Nhà toán

học Hungari Bôliai (1802 – 1860) và nhà toán học Nga Lobasepxki (1793 – 1856) đã xây dựng một hệ hình học rất chi tiết trong đó tiên đề song song bị bác bỏ. Khi người thanh niên nhiệt tâm và có tài Bôliai gửi công trình của mình cho « vua toán học » Gaux và nóng lòng chờ đợi sự ủng hộ thì ông đã được cho biết là chính Gaux đã phát minh ra điều đó sớm hơn, nhưng Gaux tự kiềm chế không công bố các kết quả của mình để tránh những cuộc thảo luận ồn ào.

Chúng ta hãy xét xem tính độc lập của tiên đề song song có nghĩa như thế nào. Tính độc lập đó cần được hiểu với ý nghĩa là việc xây dựng các mệnh đề hình học về điểm, về đường thẳng v.v..., bằng cách xuất phát từ các tiên đề trong đó tiên đề song song được thay thế bởi một tiên đề ngược lại là không có mâu thuẫn nội tại. Một cấu trúc như vậy là một hình học phi Ơclid. Phải có lòng dũng cảm về mặt trí tuệ của Gaux, Bôliai và Lôbasepxki mới ý thức được rằng hình học xây dựng trên một hệ tiên đề không Ơclid vẫn có thể là tuyệt đối phi mâu thuẫn.

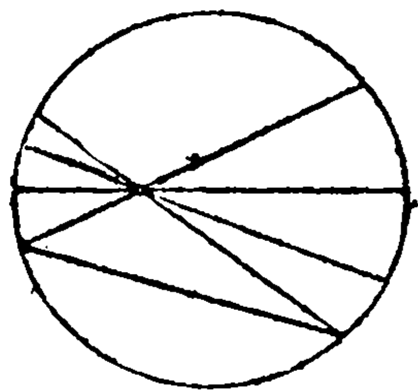
Muốn khẳng định được tính phi mâu thuẫn của một hình học mới, không cần thiết phải phát triển nhiều định lý rất chi tiết của hình học phi Ơclid như Bôliai và Lôbasepxki đã làm. Bây giờ ta đã xây dựng được những « mô hình » đơn giản của hình học đó thỏa mãn tất cả các tiên đề Ơclid trừ tiên đề song song. Do ảnh hưởng tư tưởng của nhà hình học người Anh Keli (1821 – 1895), Fêlix Klêin đã đưa ra một mô hình đơn giản nhất. Trong mô hình này thì qua một điểm cho trước nằm ngoài đường thẳng cho trước có thể vẽ vô số « đường thẳng » « song song » với đường thẳng đã cho. Một hình học tương tự thuộc loại này được gọi là hình học Bôliai – Lôbasepxki hoặc hình học « hypebolic ».

Khi xây dựng mô hình Klêin thì lúc đầu, ta xét các sự vật của hình học Ơclid thông thường sau đó đổi tên một số sự vật và quan hệ giữa chúng sao cho việc mô tả chúng là thuận tiện cho hình học Ơclid. Hình học này ít nhất cũng là phi mâu thuẫn như hình học Ơclid ban đầu bởi vì nó được trình bày như là tập hợp các sự kiện của hình học Ơclid (nếu xét với quan điểm khác và mô tả với những từ khác). Có thể thấu hiểu mô hình đó dễ dàng nếu chú ý đến một số khái niệm của hình học xạ ảnh.

Trong một biến đổi xạ ảnh của mặt phẳng lên một mặt phẳng khác hoặc lên chính nó (có thể hai mặt phẳng sẽ trùng nhau sau phép ánh xạ) thì nói chung, một đường tròn sẽ biến thành một thiết diện cônic nào đó. Song, có thể chứng tỏ dễ dàng rằng (ta sẽ không nêu chứng minh ở đây) có vô số biến đổi xạ ảnh của mặt phẳng lên chính nó mà trong đó một hình tròn cho trước biến thành chính nó. Trong những biến đổi như vậy thì nói chung các điểm ở bên trong cũng như các điểm ở trên biên đều thay đổi vị trí, nhưng các điểm ở bên trong vẫn ở bên trong, các điểm ở trên biên vẫn ở trên biên (dễ dàng nhận thấy tâm của hình tròn có thể biến thành một điểm bên trong tùy ý cho trước). Ta sẽ xét tập hợp tất cả các biến đổi như vậy. Tất nhiên, chúng không giữ nguyên diện mạo của hình cho nên chúng không phải là một phép dời hình theo nghĩa thông thường. Nhưng bây giờ ta sẽ *gọi tên* chúng là « các phép dời hình phi Ơclid » trong hình học mà ta sẽ xây dựng. Bằng các « phép dời hình » đó, ta có thể tiếp tục định nghĩa « sự bằng nhau »: hai hình được *gọi là* bằng nhau nếu có một phép dời hình học phi Ơclid biến đổi hình này thành hình kia.

Bây giờ, ta sẽ mô tả mô hình Klêin của hình học hypebolic đã nêu trên một « Mặt phẳng » chỉ gồm những

điểm ở bên trong một hình tròn, các điểm ở ngoài phải bỏ đi. Mỗi điểm ở bên trong được gọi là « một điểm » phi Ơclid, mỗi dây cung của hình tròn được gọi là « một đường thẳng » phi Ơclid; « phép dời hình » và « sự bằng nhau » thì như đã định nghĩa ở trên; việc vẽ một « đường thẳng » đi qua hai « điểm » và việc tìm « giao điểm » của hai « đường thẳng » được thực hiện như trong hình học Ơclid. Dễ chứng minh rằng cấu trúc mới này thỏa mãn mọi tiên đề của hình học Ơclid chỉ trừ có tiên đề song song. Điều này thể hiện ở chỗ, qua một « điểm » không nằm trên « đường thẳng » có thể vẽ vô số « đường thẳng » không có « điểm » chung với đường thẳng đã cho. « Đường thẳng » cho trước ở đây là một dây cung Ơclid, « đường thẳng » thứ hai có thể là một dây bất kỳ đi qua « điểm » cho trước và không cắt « đường thẳng » thứ nhất ở trong hình tròn. Mô hình đơn giản vừa mô tả là hoàn toàn đủ để kết thúc vấn đề cơ bản phát sinh ra hình học phi Ơclid: nó chứng tỏ rằng tiên đề song song không thể suy ra được từ những tiên đề còn lại của hình học Ơclid. Quả vậy, nếu suy ra được từ những tiên đề khác thì nó phải là một định lý đúng trong mô hình của Klêin, nhưng không phải là như vậy.

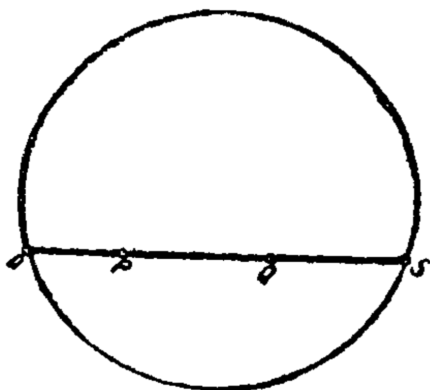


H. 110. Mô hình mặt phẳng phi Ơclid của Klêin

Nói một cách chặt chẽ thì luận chứng ở trên được xây dựng trên một giả thiết là mô hình của Klêin phi mâu thuẫn, tức là không thể chứng minh được đồng thời một khẳng định nào đó và một khẳng định đối lập với nó. Nhưng, dù thế nào thì hình học của mô hình Klêin cũng là phi mâu thuẫn cũng như hình học Ơclid thông thường, bởi vì các định lý về « điểm » và « đường thẳng » v.v... của mô hình Klêin chính là các định lý

của hình học Ơclid được diễn đạt theo cách riêng của nó. Một chứng minh đầy đủ về tính phi mâu thuẫn của hệ tiên đề hình học Ơclid sẽ không thể có được nếu không qui về hình học giải tích và rút cục là về continum số, mà tính phi mâu thuẫn của khái niệm continum thì cũng là một vấn đề chưa được giải quyết.

* Chúng tôi còn lưu ý bạn đọc thêm một chi tiết nữa (mặc dầu nó vượt ra ngoài giới hạn của bài toán mà ta đặt ra trực tiếp ở đây): về định nghĩa « khoảng cách » phi Ơclid trong mô hình Klêin. « Khoảng cách » này phải là bất biến đối với « phép dời hình » phi Ơclid bởi vì phép dời hình thông thường không thay đổi khoảng cách thông thường. Ta đã biết, tỉ số kép là bất biến của hình học xạ ảnh. Tất nhiên sẽ nảy ra ý nghĩ dùng tỉ số kép (OSQP) để định nghĩa khoảng cách giữa hai điểm P và Q ở bên trong hình tròn của ta, trong đó O và S là những điểm mà đoạn PQ cắt đường tròn nếu kéo dài về cả hai phía. Thực ra thì tỉ số kép này là một số dương, nhưng nếu lấy nó trực tiếp làm « khoảng cách » PQ thì không thuận tiện. Thực vậy, với giả thiết ba điểm P, Q, R nằm trên một đường thẳng, ta phải có đẳng thức $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$, nhưng nói chung thì:



H. 111. Khoảng cách phi Ơclid

$$(OSQP) + (OSRQ) \neq (OSPR)$$

Trái lại, một đẳng thức khác sẽ đúng:

$$(OSQP) \,.\, (OSRQ) = (OSPR) \,; \qquad (1)$$

Thực vậy:

$$(OSQP) \,.\, (OSRQ) = \left\{\frac{QO}{QS} : \frac{PO}{PS}\right\} . \left\{\frac{RO}{RS} : \frac{QO}{QS}\right\} =$$

$$= \frac{RO}{RS} : \frac{PO}{PS} = (OSRP)$$

Tính chất (1) cho phép ta định nghĩa « khoảng cách » PQ là *logarit của tỉ số kép* (mà không phải là bản thân tỉ số kép đó) với mục đích bảo đảm sự cộng tính của khoảng cách: $\overline{PQ}$ = « khoảng cách » phi Ơclid PQ = log(OSQP). « Khoảng cách » này là số dương bởi vì khi $P \neq Q$ thì $(OSQP) > 1$.

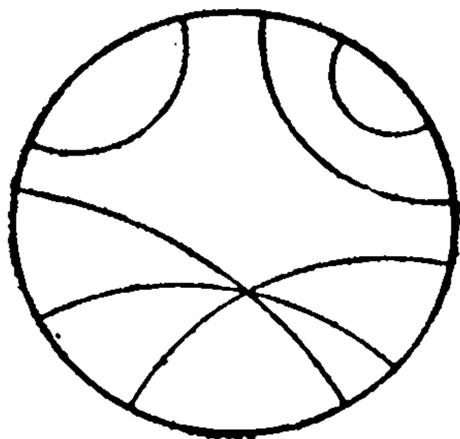
1. Từ tính chất cơ bản của Logarit và (1) suy ra $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$. Chọn cơ số nào của logarit là không quan trọng bởi vì khi thay đổi cơ số ta chỉ thay đổi đơn vị của phép đo. Mặt khác, nếu một điểm (Q chẳng hạn) dần tới đường tròn thì khoảng cách phi Ơclid PQ sẽ tăng lên vô hạn. Điều này có nghĩa là « đường thẳng» trong mô hình phi Ơclid của ta sẽ có « độ dài » phi Ơclid vô hạn, tuy rằng với ý nghĩa Ơclid thì nó là một đoạn hữu hạn.

3. Hình học và thực tại. Mô hình của Klêin chứng tỏ rằng hình học hypebolic là một cấu trúc suy diễn hình thức phi mâu thuẫn cũng như hình học Ơclid cổ điển. Một vấn đề nảy ra: nếu đề cập đến sự mô tả các quan hệ hình học có trong thế giới vật lý thì phải ưa thích thứ hình học nào trong hai hình học đó? Như ta đã nhấn mạnh, thực nghiệm tuyệt nhiên không thể giải quyết được vấn đề qua một điểm cho trước chỉ vẽ được một đường thẳng song song với đường thẳng cho trước hay là có thể vẽ được vô số. Song, trong hình học Ơclid thì tổng các góc trong tam giác là 180^0, nhưng trong hình học hypebolic có thể chứng minh tổng đó nhỏ hơn 180^0. Gaux đã nghiên cứu bằng thực nghiệm vấn đề: với quan điểm vật lý thì tổng các góc của một tam giác sẽ như thế nào. Ông đã đo rất cẩn thận các góc của tam giác tạo thành bởi ba đỉnh núi khá xa nhau,

trong khuôn khổ của các sai số có thể được của phép đo thì tổng các góc bằng 180°. Nếu kết quả là nhỏ hơn 180° rõ rệt thì từ đó có thể suy ra hình học hypebolic phù hợp hơn với việc mô tả thế giới bên ngoài. Song thực nghiệm đã không giải quyết vấn đề gì, bởi vì đối với những tam giác không lớn có các cạnh dài khoảng vài hải lý thì sự sai khác so với 180° mà hình học hypebolic đã tiên đoán vẫn nhỏ đến nỗi các dụng cụ của Gaux không thể phát hiện ra được. Như vậy, tuy không cho những kết quả quyết định, thực nghiệm cũng chứng tỏ rằng hình học Oclid và hypebolic chỉ khác nhau trong những phần không gian *rộng lớn*, đối với những hình tương đối nhỏ thì về mặt thực tiễn chúng đều tiện dùng như nhau. Bởi thế, nếu chỉ xét đến những tính chất *địa phương* của không gian thì việc lựa chọn giữa hai thứ hình học chỉ cần theo nguyên tắc đơn giản. Nhưng vì làm việc với hình học Oclid dễ hơn nhiều so với hình học hypebolic, cho nên ta sẽ dùng hình học Oclid trong khi xét đến những khoảng cách không lớn (khoảng vài triệu hải lý). Nhưng không có cơ sở để hy vọng rằng nó là thích hợp khi mô tả thế giới vật lý trong toàn bộ với toàn bộ không gian rộng lớn của nó. Vị trí của sự vật trong hình học cũng hoàn toàn như vị trí của nó trong vật lý, ở đấy các hệ thống Niutơn và Anhxtanh cho các kết quả giống nhau với những khoảng cách và tốc độ nhỏ, nhưng lại sai khác nhau khi xét đến các đại lượng lớn.

Ý nghĩa khoa học — cách mạng của sự phát minh hình học phi Oclid là ở chỗ nó đã xóa bỏ quan niệm về tiên đề Oclid như là một sơ đồ toán học bất di bất dịch phù hợp với tri thức thực nghiệm của chúng ta về thực tại vật lý.

4. Mô hình Poăng Carê. Nhà toán học nhìn thấy « hình học » trong mọi hệ tiên đề phi mâu thuẫn một cách tùy ý, các tiên đề nói về « những điểm », « những đường thẳng » v.v..., nhưng những công trình nghiên cứu của ông ta sẽ chỉ có ích cho vật lý học trong trường hợp hệ tiên đề của ông ta phù hợp với hành vi của các sự vật vật lý trong thế giới thực tại. Bây giờ, với quan điểm này, ta muốn làm rõ ý nghĩa của khẳng định: « ánh sáng truyền theo đường thẳng ». Nếu trong khẳng định này có chứa một *định nghĩa vật lý học* của « đường thẳng » thì phải lựa chọn một hệ tiên đề hình học sao cho phù hợp với hành vi của các tia sáng. Theo Poăng-Carê, ta hình dung thế giới gồm phần bên trong của hình tròn C và, ở mọi điểm tốc độ của ánh sáng tỉ lệ với khoảng cách từ điểm đó tới đường tròn. Khi đó, có thể chứng minh rằng ánh sáng được truyền theo một cung tròn vuông góc với đường tròn C. Trong một thế giới như vậy thì các tính chất hình học của « những đường thẳng » (được xác định như những tia sáng) sẽ khác với những tính chất của các đường thẳng Ơclid. Đặc biệt, sẽ không có tiên đề song song Ơclid bởi vì có một tập hợp vô số « đường thẳng » đi qua một điểm cho trước và không cắt một « đường thẳng » cho trước. Có thể nhận thấy « điểm » và « đường thẳng » trong thế giới đang mô tả có những tính chất giống như « điểm » và « đường thẳng » trong mô hình Klein. Nói cách khác, ta đã thu được một mô hình mới của hình học hypebolic. Tuy nhiên, vẫn có thể áp dụng hình học Ơclid trong thế giới này: bây



H. 112. Mô hình phi Ơclid của Poăng Carê

giờ ta suy ra rằng những tia sáng sẽ không phải là « các đường thẳng phi Ơclid », mà được truyền theo các hình tròn vuông góc với đường tròn C. Như vậy, có thể mô tả cùng một tình huống vật lý bằng những hệ thống hình học khác nhau nếu giả thiết các sự vật vật lý (trong trường hợp này là các tia sáng) liên kết với các khái niệm khác nhau trong hệ thống đó:

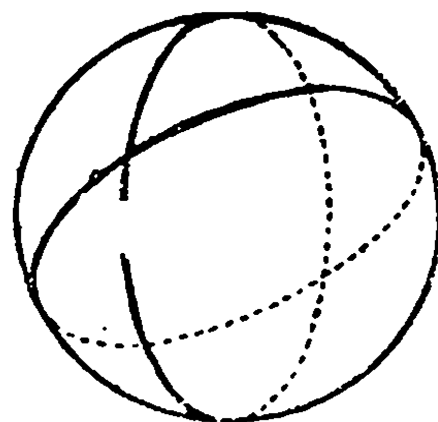
Tia sáng → « đường thẳng » — hình học hypebolic

Tia sáng → « đường tròn » — hình học Ơclid

Vì trong hình học Ơclid, khái niệm đường thẳng tương ứng với hành vi của tia sáng trong môi trường đồng chất, cho nên trong việc mô tả thế giới, nếu nói rằng hình học bên trong C là hypebolic thì cũng tức là khẳng định rằng các tính chất vật lý của tia sáng trong thế giới đó giống như các tính chất của « đường thẳng » trong hình học hypebolic mà thôi.

5. Hình học eliptic hoặc hình học Riman. Hình học Ơclid cũng như hình học hypebolic của Bôliai — Lobasepxki thừa nhận một cách thầm lặng mọi đường thẳng là vô hạn (tính vô hạn của đường thẳng có liên quan thực sự với quan hệ « ở giữa » và với các tiên đề về thứ tự). Nhưng sau khi hình học hypebolic mở đường cho việc xây dựng hình học một cách tự do thì tất nhiên nảy ra vấn đề, có thể tiến hành xây dựng những hình học phi Ơclid trong đó đường thẳng là hữu hạn và đóng kín được hay không. Tất nhiên, trong những hình học như vậy thì không phải chỉ có tiên đề song song mà cả các tiên đề về thứ tự cũng mất hiệu lực. Các công trình nghiên cứu hiện tại đã làm rõ ý nghĩa của những hình học này đối với các lý thuyết vật lý mới nhất. Lần đầu tiên, những hình học như vậy đã được phân tích trong diễn văn của Riman năm 1851 khi bắt đầu nhận nhiệm vụ phó giáo sư trường đại học Gottingen. Có

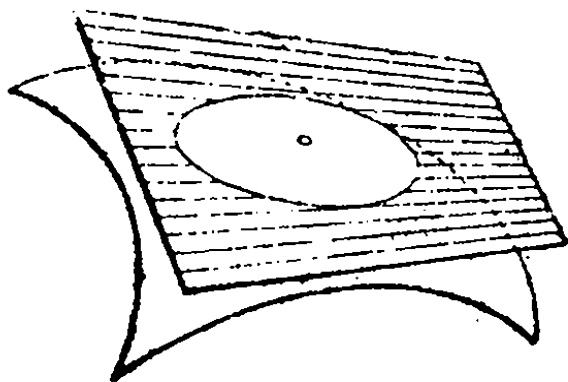
thể xây dựng hình học với các đường thẳng hữu hạn đóng kín mà không gặp mâu thuẫn nào. Ta hãy hình dung một thế giới hai chiều gồm một mặt cầu S, trong đó ta qui ước hiểu « đường thẳng » là những đường tròn lớn của mặt cầu. Đó là phương pháp mô tả « thế giới » tự nhiên nhất của những người đi biển: những đường tròn lớn này là những đường cong ngắn nhất nối hai điểm trên mặt cầu; đó cũng là tính chất đặc trưng của các đường thẳng trên mặt phẳng. Trong thế giới hai chiều đang xét hai « đường thẳng » *bất kỳ* đều cắt nhau, tức là từ một điểm ở ngoài không thể dựng « đường thẳng » nào không cắt « đường thẳng » cho trước (tức là song song với nó). Hình học của các « đường thẳng » trong thế giới này được gọi là *hình học eliptic*. Khoảng cách giữa hai điểm trong hình học này được đo bằng độ dài cung ngắn nhất của đường tròn lớn đi qua các điểm đã cho. Góc thì được đo như trong hình học Ơclid. Ta coi tính chất đặc trưng nhất của hình học eliptic là sự không tồn tại những đường song song. Theo Riman, ta có thể mở rộng hình học này như sau. Ta xét « một thế giới » gồm một mặt cong nào đó trong không gian (không bắt buộc là mặt cầu) và định nghĩa đường thẳng đi qua hai điểm là *đường cong ngắn nhất* (đường cong « địa vật lý ») nối hai điểm đó. Có thể chia các điểm của mặt thành hai lớp: lớp thứ nhất gồm các điểm mà trong lân cận của chúng thì mặt là tương tự như mặt cầu với ý nghĩa là nó nằm ở một phía đối với tiếp diện tại điểm đó; lớp thứ hai gồm những điểm mà trong



H: 113. «Các đường thẳng» trong hình học Riman.

lân cận của chúng thì mặt có hình yên ngựa (nằm về hai phía đối với tiếp diện). Các điểm thuộc lớp thứ nhất được gọi là các điểm eliptic của mặt với lý do trong phép tịnh tiến song song không lớn của tiếp diện thì nó cắt mặt theo một đường cong có dạng một elip; các điểm thuộc lớp thứ hai có tên là các điểm hypebolic bởi vì trong phép tịnh tiến tương tự thì tiếp diện cắt mặt theo một đường cong có dạng hypebolic. Hình học của các «đường thẳng» địa vật lý trong lân cận các điểm của mặt là hình học eliptic hay hypebolic là tùy theo bản thân điểm đó là elip hay hypebolic. Trên mô hình này của hình học phi Ơclid thì góc vẫn được đo như trong hình học Ơclid thông thường.

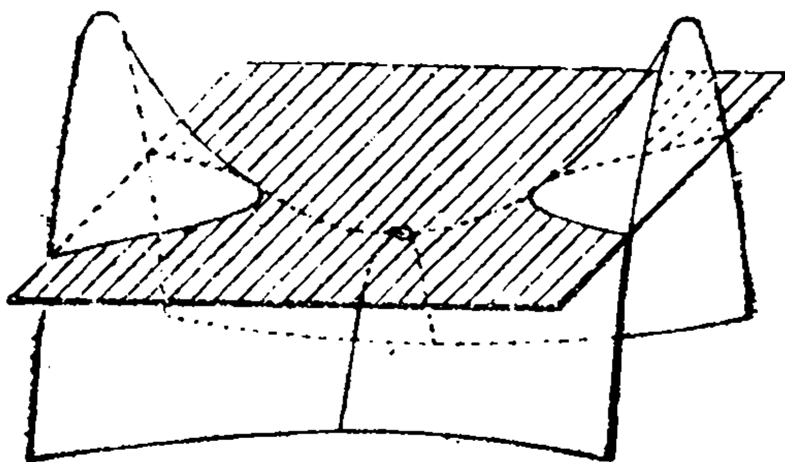
Tư tưởng trên đã được Riman phát triển xa hơn: Ông đã xét những hình học của không gian tương tự như hình học của các mặt vừa phân tích ở trên. Theo Riman, «độ cong» của không gian thay đổi từ điểm này qua điểm khác sẽ xác định đặc tính của hình học ở lân cận điểm đó. Đối với Riman không gian trong lý thuyết tương đối tổng quát của Anhxtanh là hình học Riman; ánh sáng được truyền theo các đường địa vật lý, độ cong của không gian tại mỗi điểm được xác định phụ thuộc vào các tính chất của vật chất trong lân cận các điểm đó.



H. 114. Điểm eliptic.

Nảy sinh từ những khảo sát có tính chất thuần túy tiên đề, ngày nay hình học phi Ơclid đã trở thành một công cụ cực kỳ có ích đối với những áp dụng khác nhau trong việc nghiên cứu thực tại vật lý. Trong lý

thuyết tương đối, trong quang học, trong lý thuyết giao động tổng quát thì việc mô tả phi Ơclid các hiện tượng, trong nhiều trường hợp, tỏ ra thích hợp hơn với thực tại vật lý so với cách mô tả Ơclid.



H. 115. Điểm hypebolic.

PHỤ LỤC

HÌNH HỌC TRONG CÁC KHÔNG GIAN NHIỀU CHIỀU

1. Mở đầu. Không gian « thực tại » — môi trường của thí nghiệm vật lý — có ba chiều, mặt phẳng có hai chiều, đường thẳng có một chiều. Trực giác không gian của chúng ta, hiểu theo nghĩa thông thường, giới hạn bởi ba chiều, không phát triển được xa hơn. Song trong nhiều trường hợp, ta có thể nói về « các không gian » có bốn hoặc nhiều chiều hơn. Ta nói về không gian n chiều ($n > 3$) với ý nghĩa nào và những không gian như vậy có ích gì? Chỉ có thể giải đáp nếu đứng trên quan điểm giải tích hoặc quan điểm hình học. Chỉ

có thể xem xét thuật ngữ không gian n — chiều như một ngôn ngữ ẩn dụ dùng để biểu thị các tư tưởng toán học nằm ngoài giới hạn của trực giác hình học thông thường.

2. Cách xử lý giải tích. Chúng tôi đã có dịp lưu ý bạn đọc về sự thay đổi vai trò của hình học giải tích diễn ra trong suốt quá trình phát triển của nó. Lúc đầu thì điểm, đường thẳng, đường cong v.v... được xem như các sự vật hình học thuần túy và nhiệm vụ của hình học giải tích vẻn vẹn chỉ là cho ứng các sự vật đó với các tọa độ hoặc các phương trình để thể hiện và phát triển xa hơn một lý thuyết hình học bằng các phương pháp đại số hoặc giải tích. Dần dần, một quan điểm đối lập được xác nhận. Số x hoặc cặp số x, y hoặc bộ ba số x, y, z được xem như các sự vật ban đầu cơ bản, sau đó những sự vật giải tích này được « cụ thể hóa », hoặc nói đúng hơn « trực quan hóa » dưới dạng các điểm trên đường thẳng, trên mặt phẳng, trong không gian. Bây giờ thì ngôn ngữ hình học đã được dùng để xác nhận sự tồn tại của những quan hệ này hay quan hệ khác giữa các số. Ở đây, ta tước bỏ đi ý nghĩa độc lập của các sự vật hình học và nói rằng cặp số x, y là một điểm trên mặt phẳng, tập hợp tất cả các cặp x, y thỏa mãn phương trình tuyến tính $L(x, y) = = ax + by + c = 0$ (a, b, c là những số không đổi cho trước) *là* một đường thẳng v.v... Đối với không gian ba chiều thì những định nghĩa như vậy cũng được xác lập.

Thậm chí, trong trường hợp ta nghiên cứu một vấn đề riêng của đại số, ngôn ngữ hình học thường tỏ ra rất thuận tiện để mô tả ngắn gọn và hoàn toàn chính xác các sự kiện và, trực giác hình học bắt đầu hoạt động gợi ý cho những qui trình đại số đúng đắn. Chẳng hạn, khi giải hệ ba phương trình tuyến tính với ba ẩn số x, y, z

ta giải thích bằng hình học bài toán và nói rằng cần tìm trong không gian ba chiều R_3 giao điểm của ba mặt phẳng cho bởi các phương trình $L = 0$, $L' = 0$, $L'' = 0$ Một thí dụ khác: khi xét tất cả các cặp số x, y sao cho $x > 0$, ta nói rằng ta xét nửa mặt phẳng bên phải trục y. Trong trường hợp tổng quát hơn, tập hợp các cặp số x, y thỏa mãn bất đẳng thức:

$$L(x, y) = ax + by + c > 0,$$

được thể hiện như một nửa mặt phẳng nằm về một phía của đường thẳng $L = 0$, còn tập hợp những bộ ba số x, y, z sao cho $L(x, y, z) = ax + by + cz + d > 0$ được xem như «nửa không gian» xác định bởi mặt phẳng $L = 0$.

Sau những thuyết minh này ta chuyển sang không gian «bốn chiều» hoặc thậm chí «n chiều» một cách dễ dàng. Ta xét một bộ bốn điểm x, y, z, t. Ta nói rằng một bộ bốn như vậy là một điểm trong không gian bốn chiều R_4. Nói chung, theo định nghĩa thì một điểm của không gian n chiều R_n không có gì khác chính là một hệ thống gồm n số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$, được viết theo một thứ tự xác định. Ta không thể nhìn thấy được điểm đó, điều này không quan trọng. Ngôn ngữ hình học vẫn hoàn toàn dễ hiểu trong trường hợp đề cập đến các tính chất đại số của n biến số. Thực ra, nhiều tính chất đại số của các phương trình tuyến tính hoàn toàn không phụ thuộc vào số các biến số đưa vào hoặc, như ta thường nói, không phụ thuộc vào thứ nguyên của không gian những biến đó. Bởi thế, ta sẽ gọi «siêu

phẳng » là tập hợp tất cả các điểm $x_1, x_2, ..., x_n$ trong không gian n — chiều thỏa mãn phương trình tuyến tính:

$L(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b = 0$

Cũng như vậy, bài toán đại số cơ bản giải hệ n phương trình tuyến tính n ẩn:

$$\begin{cases} L_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ L_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ L_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

được giải thích bằng ngôn ngữ hình học là việc tìm giao điểm của n siêu phẳng $L_1 = 0$, $L_2 = 0, ..., L_n = 0$.

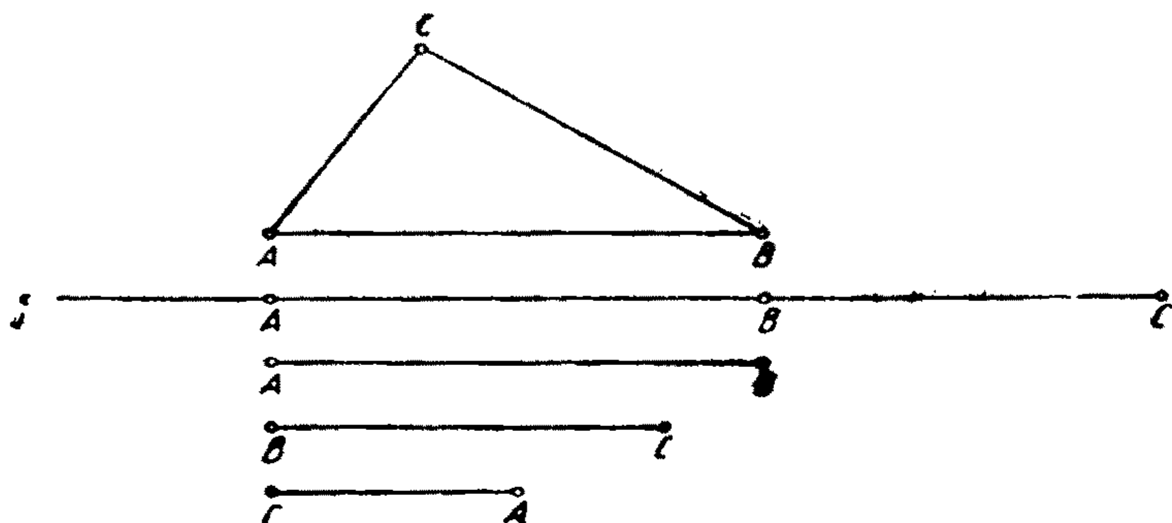
Ưu điểm của phương pháp mô tả các sự kiện toán học bằng hình học là nó nêu bật được một số trạng thái của đặc trưng đại số không phụ thuộc vào số thứ nguyên n và thể hiện được một cách trực quan trong trường hợp $n \leqslant 3$. Trong nhiều ứng dụng, việc dùng các thuật ngữ hình học cũng có ưu điểm ngắn gọn, đồng thời làm cho những lập luận của giải tích được dễ dàng, có khi chỉ đạo và hướng những lập luận đó về phía cần thiết. Một lần nữa lý thuyết tương đối lại được dẫn ra với tư cách một thí dụ về một lĩnh vực mà trong đó đã đạt được một thành quả quan trọng do việc kết hợp được ba tọa độ không gian x, y, z và tọa độ thời gian t của một « sự kiện » trong một « đa tạp bốn chiều không gian — thời gian ». Bởi vậy, nếu buộc « không gian — thời gian » phục tùng sơ đồ giải tích đó và gán cho nó những tính chất của hình học phi Ơclid, ta có thể mô tả nhiều tình huống khá phức tạp bằng một cách đơn giản lạ thường. Những không gian n — chiều trong cơ học, trong vật lý thống kê, nếu như không nói ngay trong bản thân toán học, đã tỏ ra có ích biết chừng nào.

Ta nêu thêm những thí dụ thuần túy toán học. Tập hợp tất cả các hình tròn trên một mặt phẳng tạo nên một đa tạp ba chiều, bởi vì hình tròn tâm x, y bán kính t có thể được biểu thị bởi một điểm có tọa độ x, y, t. Vì bán kính hình tròn là một số dương cho nên tập hợp các điểm đang xét lấp đầy nửa không gian. Cũng vậy, tập hợp tất cả các hình cầu trong không gian ba chiều thông thường tạo nên một đa tạp bốn chiều, bởi vì mỗi hình cầu tâm x, y, z bán kính t có thể được biểu thị bởi một điểm có tọa độ x, y, z, t. Hình lập phương trong không gian ba chiều có tâm ở gốc tọa độ, có các cạnh dài 2 và có các mặt song song với các mặt phẳng tọa độ sẽ chứa tập hợp tất cả các điểm x_1, x_2, x_3 sao cho $|x_1| \leqslant 1$, $|x_2| \leqslant 1$, $|x_3| \leqslant 1$. Cũng vậy, « lập phương » trong không gian n chiều R_n có tâm ở gốc tọa độ, có « các cạnh » dài 2 và các mặt song song với các mặt phẳng tọa độ được định nghĩa như một tập hợp các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho đồng thời có các bất đẳng thức $|x_1| \leqslant 1$, $|x_2| \leqslant 1, \ldots, |x_n| \leqslant 1$. « Mặt » của lập phương như thế bao gồm tất cả các điểm sao cho ít nhất một trong các hệ thức đã cho đó có dấu đẳng thức. Các yếu tố có thứ nguyên n − 2 trên bề mặt gồm các điểm mà ít nhất dấu đẳng thức có hai lần.

*** 3. Cách xử lý hình học hoặc tổ hợp.** Dù rằng cách xử lý giải tích đối với hình học n — chiều là cực kỳ đơn giản và thuận tiện cho nhiều ứng dụng, ta vẫn phải nhắc đến một phương pháp khác có tính chất hình học thuần túy. Nó dựa trên việc qui n — chiều đã cho về (n — 1) chiều và mở ra khả năng định nghĩa hình học nhiều chiều bằng qui nạp toán học.

Ta bắt đầu từ việc xét chu tuyến của tam giác ABC trong hai phép đo. Cắt nó ở điểm C rồi quay các cạnh AC và BC theo thứ tự xung quanh A và B, ta sẽ kéo chu tuyến thành một đoạn thẳng (H. 116), trong đó

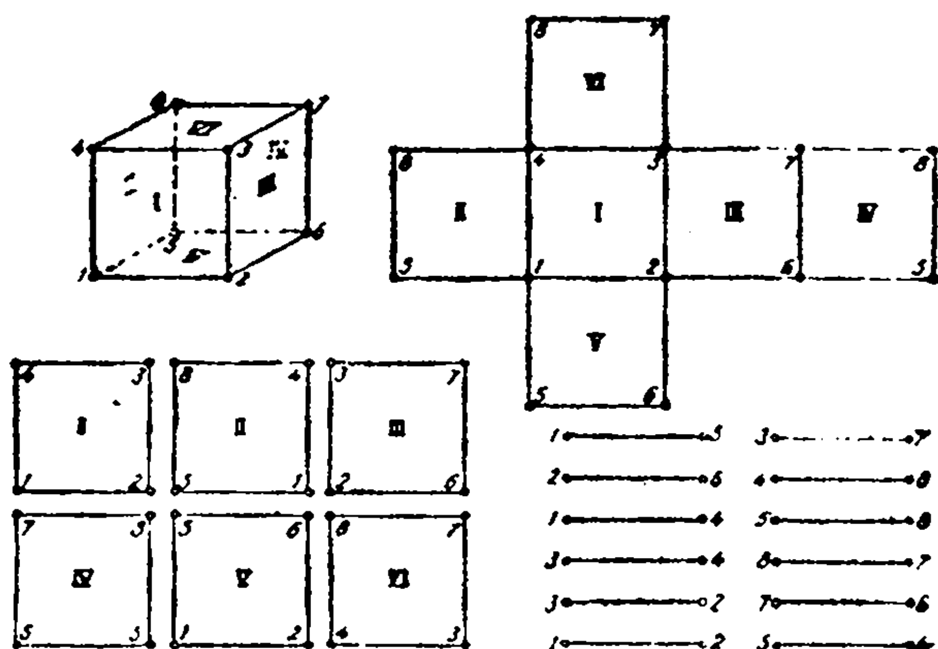
điềm C có mặt hai lần. Hình một chiều thu được cho ta một biểu tượng về chu tuyến của tam giác hai chiều. Gấp hình tại các điềm A và B và cho hai điềm C trùng nhau, ta dựng lại được tam giác. Điều quan trọng là hoàn toàn không cần gấp hình. Chỉ cần qui ước rằng



H. 116. Xác định tam giác theo các cạnh có mút tiếp nhau.

ta sẽ «đồng nhất hóa» (tức là không phân biệt) hai điềm C dù rằng hai điềm đó không trùng nhau theo nghĩa thông thường. Còn có thề làm như sau : cũng cắt hình ở các điểm A và B, ta được ba đoạn thẳng CA, AB, BC mà khi cần có thề sắp xếp đề khôi phục lại tam giác ABC «chân thực» trong đó các cặp điềm đã đồng nhất hóa sẽ trùng với nhau. Tư tưởng đồng nhất hóa những điềm khác nhau trong một tập hợp các đoạn thẳng cho trước đề có thề từ những đoạn thẳng đó dựng nên chu tuyến của một đa giác (ở đây là tam giác) trong thực tiễn có khi tỏ ra rất có lợi. Nếu phải chuyền đi một bộ các thanh kim loại, bộ dầm cầu chẳng hạn, tốt nhất là ta bó những thanh đã tháo rời với nhau, đánh dấu những đầu mút phải lắp lại bằng những dấu giống nhau. Tập hợp các thanh với các đầu mút đánh dấu như vậy hoàn toàn tương đương với một

cấu trúc không gian. Điều lưu ý trên gợi ý ta cách « tháo dỡ » một đa diện hai chiều ở trong không gian ba chiều bằng cách thay nó bởi các hình có thứ nguyên thấp hơn. Chẳng hạn, ta lấy mặt của lập phương (H. 117). Bây giờ có thể qui nó về một hệ thống có sáu



H. 117. Xác định hình lập phương theo các cạnh và các đỉnh tiếp nhau.

hình vuông, cạnh của chúng được đồng nhất hóa một cách thích hợp; bước tiếp theo sẽ là việc thay thế hệ thống hình vuông này bằng 12 đoạn thẳng có các mút đã được đồng nhất hóa một cách thích hợp.

Nói chung, một đa diện bất kỳ trong không gian ba chiều R_3 sẽ được qui theo cách như vậy thành một hệ thống các đa giác phẳng hoặc thành một hệ thống các đoạn thẳng.

Bây giờ thì rõ ràng ta có thể quay trở lại quá trình lập luận của chúng ta bằng cách *định nghĩa* đa giác trên mặt phẳng nhờ một hệ thống các đoạn thẳng và định nghĩa khối đa diện trong không gian R_3 bằng hệ thống các

đa giác trong R_2, nếu tiếp tục giảm thì lại có thể định nghĩa nó nhờ các đoạn thẳng, thế thì hoàn toàn tự nhiên ta có thể định nghĩa « khối đa diện » trong không gian bốn chiều R_4 nhờ một hệ thống các khối đa diện trong R_3 với một sự đồng nhất hóa các mặt hai chiều một cách thích hợp; « khối đa diện » trong R_5 được định nghĩa qua các « khối đa diện » trong R_4 v.v... Rút cục thì mọi « khối đa diện » trong R_n được qui về một hệ thống các đoạn thẳng.

Chúng ta không có điều kiện dừng lại để nghiên cứu chi tiết hơn vấn đề này. Ta chỉ bổ sung thêm một số chú ý mà không dẫn ra các chứng minh. « Lập phương » trong R_4 được giới hạn bởi 8 lập phương ba chiều, mỗi hình lập phương có các mặt hai chiều, đồng nhất với các lập phương « kề » với chúng. Một lập phương như vậy sẽ có 16 đỉnh, ở mỗi đỉnh có bốn cạnh, số cạnh tổng cộng là 32. Trong R_4 có sáu khối đa diện đều. Ngoài « lập phương » ra còn có một khối đa diện giới hạn bởi 5 khối tứ diện đều, một khối đa diện giới hạn bởi 16 khối tứ diện đều, một giới hạn bởi 24 bát diện đều, một giới hạn bởi 120 thập nhị diện đều và một nữa giới hạn bởi 600 tứ diện đều. Người ta đã chứng minh rằng trong R_n khi $n > 4$, chỉ có 3 khối đa diện đều, một có $n + 1$ đỉnh, giới hạn bởi $n + 1$ khối đa diện trong R_{n-1}, có mặt $(n - 2)$ chiều; một có 2^n đỉnh giới hạn bởi $2n$ khối đa diện trong R_{n-1}, có $2n - 2$ mặt $(n - 2)$ — chiều; một có $2n$ đỉnh giới hạn bởi 2^n khối đa diện trong R_{n-1} có n mặt $(n - 2)$ chiều.

Với quan điểm cấu trúc hoặc « tổ hợp » thì các hình hình học đơn giản nhất 0, 1, 2, 3 chiều theo thứ tự là điểm, đoạn thẳng, tam giác, tứ diện. Để thống nhất cách ký hiệu, ta biểu thị các hình đó theo thứ tự là T_0, T_1, T_2, T_3 (các chỉ số là thứ nguyên). Cấu trúc của mỗi hình có đặc trưng là mỗi hình loại T_n có $n + 1$ đỉnh và

mỗi tập con gồm i + 1 đỉnh của một hình loại T_n ($i = 0,1,\ldots, n$) sẽ xác định một hình nào đó loại T_i. Thí dụ, tứ diện ba chiều T_3 có 4 đỉnh, 6 cạnh và 4 mặt. Ta định nghĩa «tứ diện» bốn chiều là tập hợp gồm 5 đỉnh, trong đó mỗi tập con gồm 4 đỉnh sẽ tạo nên một hình loại T_3, mỗi tập con gồm 3 đỉnh tạo nên một hình loại T_2 v.v... Một hình loại T_4 được thể hiện bằng sơ đồ trên H. 118; ta thấy nó có 5 đỉnh, 10 cạnh, 10 mặt tam giác và 5 tứ diện.

Không có khó khăn gì khi khái quát cho trường hợp n chiều. Từ lý thuyết tổ hợp ta biết có đúng $C_i^r = \frac{r!}{i!(r-i)!}$ tập con khác nhau gồm i sự vật được cấu thành từ một tập hợp r sự vật. Cho nên «tứ diện» n chiều sẽ có $C_1^{n+1} = n + 1$ đỉnh (của các hình loại T_0),

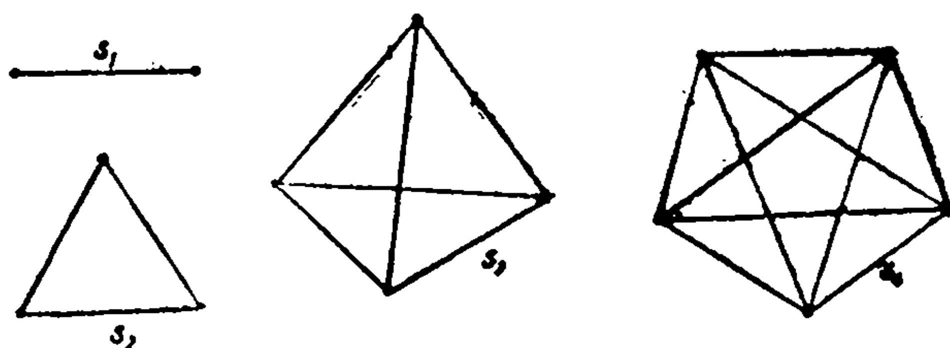
$C_2^{n+1} = \frac{(n+1)!}{2(n-1)!}$ cạnh (của các hình loại T_1)

$C_3^{n+1} = \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!}$ tam giác (các hình loại T_2),

$C_4^{n+1} = \frac{(n+1)!}{4!(n-3)!}$ các hình loại T_3,

....

$C_{n+1}^{n+1} = 1$ hình loại T_n



H. 118. Các yếu tố đơn giản nhất trong 1, 2, 3, 4 chiều.

CHƯƠNG V

TÔPÔ

MỞ ĐẦU

Vào giữa thế kỷ XIX đã phát sinh một trào lưu hoàn toàn mới trong hình học, sau này trở thành một trong những động lực chính của toán học hiện đại. Đối tượng của ngành mới — gọi là tôpô (hoặc analysis situs) — là các tính chất của các hình hình học được bảo toàn khi các hình đó chịu tác dụng của những biến đổi hình học làm mất tất cả các tính chất mêtric và xạ ảnh của chúng.

Một trong những nhà hình học vĩ đại thời ấy là A.F. Miôbiux (1790 — 1868), do tính quá khiêm nhường mà đã không đạt được may mắn trên con đường công danh khoa học: ông chỉ là một nhà thiên văn học làm việc trong một đài quan sát hạng xoàng của người Đức. Năm 68 tuổi, ông đã trình lên viện hàn lâm Pari tập hồi ký về các mặt « một phía » ghi lại những sự kiện tuyệt vời nhất trong ngành hình học mới. Cũng như nhiều công trình khoa học quan trọng khác, bản thảo của ông đã bị vứt lăn lóc nhiều năm trên giá sách của viện hàn lâm cho đến khi nó được bản thân tác giả

công bố. Độc lập với Miôbiux, nhà thiên văn Gottingen I.Lixting (1808 — 1882) đã có những phát minh tương tự và nhờ sự giúp đỡ của Gaux, năm 1847 ông đã xuất bản cuốn sách nhỏ « Vorstudien zur Topologie »[1] Khi Bergard *Riman* (1826 — 1866) đến Gottingen để học đại học ở đó thì bầu không khí toán học của thành phố đại học này đã tràn đầy tính hiếu kỳ đối với các tư tưởng hình học mới lạ. Ông nhanh chóng nhận thức được cần phải tìm ra giải đáp về những tính chất sâu sắc nhất của hàm số giải tích biến số phức ngay trong những tư tưởng đó. Vị tất sự phát triển sau này của tôpô đã chịu ơn một cái gì đó ở mức độ cao như đối với lý thuyết hàm số Riman mà trong đó những khái niệm tôpô có ý nghĩa cơ sở nhất.

Buổi đầu, tính đặc thù của những phương pháp thích hợp với ngành học mới đã làm trở ngại cho việc trình bày những kết quả thu được ở đây dưới hình thức suy diễn truyền thống và mẫu mực của hình học sơ cấp.

Nhưng sự việc xảy ra có phần khác. Chẳng hạn như Poăng Carê, khi dũng cảm tiến lên phía trước, đã buộc phải dựa hẳn vào trực giác hình học.

Ngày nay các nhà nghiên cứu tôpô cũng cảm thấy rõ ràng nếu quá chú ý đến tính hoàn hảo về hình thức thì nội dung hình học sẽ bị coi nhẹ và sẽ bị chìm đắm vào những chi tiết. Dù sao chăng nữa, cũng phải xem là một thành tựu đặc biệt, tình hình mà các công trình gần đây nhất về tôpô đã thâu tóm ngành hình học này trong phạm vi của các ngành toán học được xây dựng một cách hoàn toàn chặt chẽ. Đối với họ, trực giác là

---

(1) Tiếng Đức, nghĩa là « Khảo cứu đầu tiên về tôpo » (N.D).

nguồn gốc nhưng không phải là tiêu chuẩn cuối cùng của chân lý. Tùy theo sự phát triển của quá trình hình thức hóa tôpô, bắt đầu từ L.E. Braue, tỷ trọng của tôpô so với toán học nói chung liên tục tăng. Các nhà toán học Mỹ, đặc biệt O.Vêblen, U.Alexandơ và X. Lephsetx đã đạt được những thành tựu quan trọng theo hướng đã nêu.

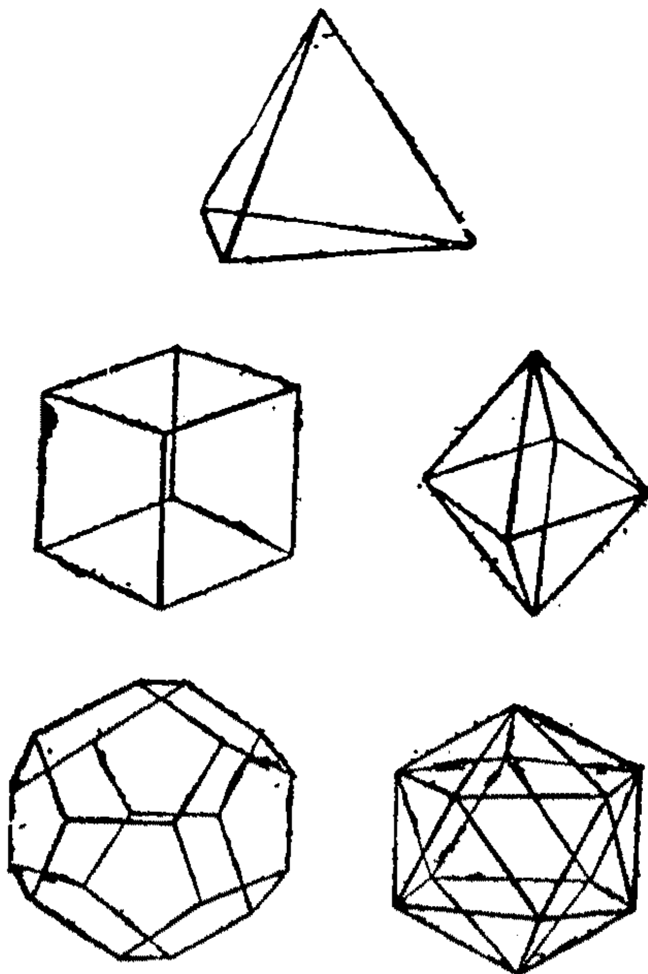
Tuy có thể gọi chắc chắn tôpô là sản phẩm của thế kỷ này nhưng vẫn phải nhấn mạnh rằng, từ rất sớm, đã có những phát minh có quan hệ gần gũi với tôpô, nếu xét nó trong hệ thống các kiến thức toán học hiện đại. Trong số đó thì điều vĩ đạt nhất là việc xác lập công thức liên hệ số đỉnh, số cạnh và số mặt của một khối đa diện đơn giản: nó đã được Đêcac phát hiện năm 1640, sau đó đã được Ơle phát hiện lại và dùng năm 1752; những nét đặc trưng của khẳng định tôpô trong công thức này đã trở nên rất hiển nhiên khi mà về sau này, Poăng Carê đã nhận ra một trong những định lý trung tâm của tôpô ở trong « công thức Ơle » và những công thức mở rộng của nó. Vậy thì, do nguyên nhân lịch sử và trật tự nội tại, chúng ta sẽ bắt đầu làm quen với tôpô qua công thức Ơle. Bởi vì trong những bước đầu đi vào một lĩnh vực chưa quen biết thì sự chặt chẽ hoàn hảo là chưa bắt buộc và chưa cần thiết, cho nên có khi chúng tôi không do dự mà viện đến trực giác của bạn đọc.

§ 1. CÔNG THỨC ƠLE ĐỐI VỚI CÁC KHỐI ĐA DIỆN

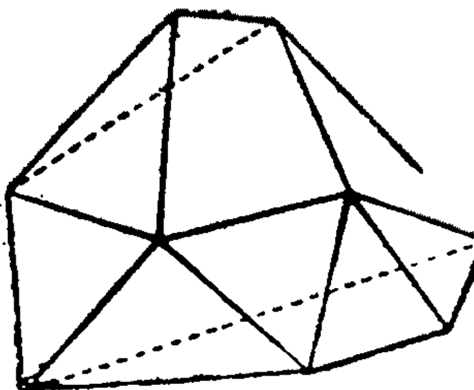
Tuy rằng trong hình học cổ xưa, việc nghiên cứu các khối đa diện chiếm vị trí trung tâm, nhưng chỉ có Đêcac và Ơle mới phát hiện được mệnh đề sau đây: Nếu V là số đỉnh của một khối đa diện đơn giản, E là số cạnh, F là số mặt thì

$$V - E + F = 2 \quad (1)$$

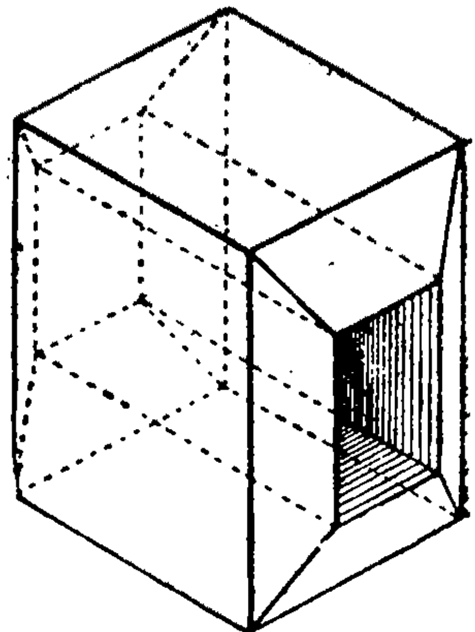
Ở đây ta hiểu *khối đa diện* là một vật thể mà mặt của nó gồm một số hữu hạn các mặt có hình đa giác. Trong các khối đa diện *đều* thì mọi đa giác đều bằng nhau và mọi góc phẳng ở đỉnh đều bằng nhau. Khối đa diện gọi là đơn giản nếu không có « những lỗ thủng » để cho sau một biến dạng liên tục thì mặt của nó có thể biến đổi thành mặt cầu. Trên H. 120 có vẽ một khối đa diện đơn



H. 119. Các khối đa diện đều.



H. 120. Khối đa diện đơn giản $V - E + F = 9 - 18 + 11 = 2$.

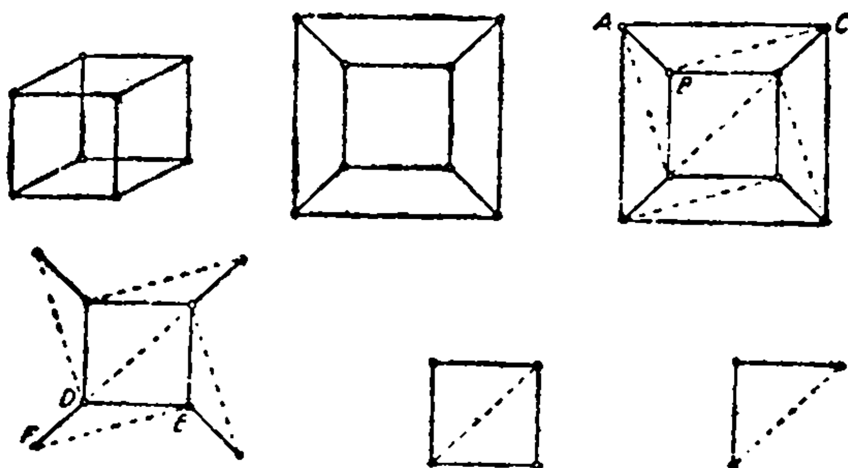


H. 121. Khối đa diện không đơn giản : $V - E + F = 16 - 32 + 16 = 0$.

giản không phải là khối đa diện đều; trên H. 121 có vẽ một khối đa diện không phải là đa diện đơn giản. Đề nghị bạn đọc kiểm tra lại công thức Ơle đối với các khối đa diện vẽ trên H. 119 và H. 120 và chứng tỏ rằng công thức đó không đúng với khối đa diện trên H. 121.

Để chứng minh định lý Ơle, ta hình dung khối đa diện của ta là rỗng, các mặt của nó làm bằng cao su mỏng. Thế thì, sau khi cắt bỏ đi một mặt, ta có thể biến dạng phần mặt còn lại sao cho phần này được trải trên mặt phẳng. Tất nhiên, lúc này các mặt của khối đa diện và các góc xen giữa các cạnh đều chịu sự biến đổi lớn. Song « mạng lưới » bao gồm các đỉnh và các cạnh nằm trên mặt phẳng sẽ có cùng số đỉnh và số cạnh như khối đa diện ban đầu, còn số mặt thì bớt đi một, bởi vì một mặt đã bị cắt bỏ đi. Bây giờ, ta sẽ chứng minh rằng đối với mạng lưới phẳng vừa thu được thì đẳng thức $V - E + F = 1$ được nghiệm đúng; sau khi thêm vào đó mặt đã cắt bỏ đi thì đẳng thức $V - E + F = 2$ là đúng với khối đa diện ban đầu.

Trước hết, ta sẽ « tam giác hóa » mạng lưới phẳng như sau. Nếu trong mạng lưới có các đa giác với số góc lớn hơn ba, ta chọn lấy một trong các đa giác đó, rồi vẽ một đường chéo bất kỳ của nó. Kết quả, mỗi số



H. 122. Chứng minh định lý Ơle

E và F tăng thêm một đơn vị nhưng giá trị của biểu thức V — E + F không thay đổi. Ta sẽ tiếp tục vẽ các đường chéo nối các cặp điểm (H. 122) cho đến khi mạng lưới chỉ gồm có những tam giác (đó là mục tiêu gần nhất của ta). Trong mạng đã tam giác đạc, đại lượng V — E + F có cùng một giá trị như trước khi thực hiện phép tam giác đạc, bởi vì việc vẽ một đường chéo mới sẽ không làm thay đổi giá trị của đại lượng đó. Hơn nữa, một số tam giác sẽ có cạnh thuộc vào « biên » của mạng lưới đã tam giác đạc. Một số trong chúng (ABC chẳng hạn) chỉ có một cạnh ở trên biên, một số khác có hai cạnh trên biên. Ta lấy một trong các tam giác « nằm trên biên » loại đó và tách khỏi nó tất cả những gì không thuộc vào một tam giác bất kỳ nào khác. Chẳng hạn, ta tách cạnh AC và bản thân bề mặt của tam giác ABC chỉ để lại các đỉnh A, B, C và các cạnh AB và BC, nhưng trong tam giác EDF thì lại tách bề mặt của nó, hai cạnh DF, FE và đỉnh F. Khi « xóa bỏ » những tam giác thuộc loại như tam giác ABC thì các số E và F sẽ giảm đi 1, còn số V không thay đổi, do đó V — E + F cũng không thay đổi. Khi xóa bỏ những tam giác thuộc loại như tam giác EDF thì V giảm đi 1, E giảm đi 2 và F giảm đi 1, do đó V — E + F vẫn không thay đổi. Việc thực hiện liên tiếp các phép tách những tam giác « nằm trên biên » như vậy (mỗi lần tách như thế thì bản thân biên cũng thay đổi) rút cục sẽ dẫn đến một tam giác duy nhất, tất nhiên có ba cạnh, ba đỉnh và một mặt. Đối với mạng hoàn toàn đơn giản này thì V — E + F = 3 — 3 + 1 = 1. Nhưng ta đã biết, khi tách mỗi tam giác ra khỏi mạng thì V — E + F không thay đổi. Tức là đối với mạng ban đầu thì V — E + F phải bằng 1; điều này cũng đúng với khối đa diện đã bị cắt đi một mặt mà từ đấy ta đã suy ra mạng lưới phẳng này. Do đó, đối với khối đa diện ban đầu (trước

khi cắt đi một mặt) thì đẳng thức $V - E + F = 2$ là đúng. Ta đã hoàn thành việc chứng minh định lý Ơle.

Nhờ định lý Ơle ta có thể chứng minh dễ dàng sự tồn tại của không quá năm loại đa diện đều. Giả thử một khối đa diện đều có F mặt trong đó mỗi mặt là đa giác đều n — cạnh và mỗi đỉnh có r cạnh. Nếu tính số cạnh một lần theo các mặt, một lần khác theo các đỉnh thì ta có:

$$nF = 2E$$

(vì mỗi cạnh đều thuộc về hai mặt, cho nên nó được tính hai lần trong tích nF)

$$\text{và } rV = 2E \quad (3)$$

(vì mỗi cạnh tựa vào hai đỉnh). Khi đó, đẳng thức Ơle (1) cho ta:

$$\frac{2E}{n} + \frac{2E}{r} - E = 2 \text{ hay } \frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E} \quad (4)$$

Ta để ý rằng $n \geqslant 3$ và $r \geqslant 3$ vì mỗi đa giác có không ít hơn ba cạnh và từ mỗi đỉnh có xuất phát không ít hơn ba cạnh. Mặt khác, n và r không thể đồng thời *lớn hơn 3*, vì nếu trái lại thì vế trái của đẳng thức (4) không vượt quá $\frac{1}{2}$, đẳng thức không thể đúng với số dương E nào. Như vậy chỉ còn phải làm sáng tỏ xem có thể thừa nhận những giá trị nào của r nếu $n = 3$ và những giá trị nào của n nếu $r = 3$. Xét tất cả các trường hợp có thể, ta sẽ suy ra được số loại đa diện đều.

Khi $n = 3$, đẳng thức (4) có dạng $\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{E}$; ở đây r có thể bằng 3, 4 hoặc 5 (các giá trị lớn hơn 5 của r phải loại vì $\frac{1}{E}$ là số dương) Với những giá trị đó của n và r thì $E = 6$, 12 hoặc 30. Ta được các khối đa diện: khối tứ diện, khối tám mặt và khối hai mươi mặt.

Tương tự, khi $r = 3$ đẳng thức (4) có dạng: $\frac{1}{n} - \frac{1}{6} =$

$= \frac{1}{E}$, suy ra $n = 3, 4$ hoặc 5 và $E = 6, 12$ hoặc 30. Ta được khối tứ diện, khối lập phương và khối mười hai mặt.

§ 2. TÍNH CHẤT TÔPÔ CỦA CÁC HÌNH

1. Các tính chất tôpô. Ta đã chứng minh công thức Ơle là đúng đối với khối đa diện đơn giản. Nhưng công thức này vẫn không mất ý nghĩa khi áp dụng cho những trường hợp khác tổng quát hơn nhiều: thay cho các khối đa diện của hình học sơ cấp với các mặt là phẳng và các cạnh là đường thẳng, ta có thể lấy các «khối đa diện» đơn giản có «mặt» là các mặt cong, có «cạnh» là những đường cong hoặc cũng có thể vẽ các «mặt» và các «cạnh» ở trên mặt của một hình cầu chẳng hạn. Ta hình dung bề mặt của khối đa diện hoặc của hình cầu được làm bằng một lớp cao su mỏng; khi đó công thức Ơle sẽ được bảo toàn nếu bề mặt đang xét bị biến dạng bằng mọi cách — uốn, nén, giãn v.v... — cốt sao lớp cao su không bị rách. Quả vậy, công thức Ơle chỉ đề cập đến *số lượng* đỉnh, cạnh và mặt; ở đây độ dài, diện tích, tỉ số kép, độ cong v.v... cũng như các khái niệm khác của hình học sơ cấp và hình học xạ ảnh không có vai trò gì cả.

Chúng ta đã chỉ ra rằng hình học sơ cấp nghiên cứu các đại lượng (khoảng cách, góc, diện tích) không thay đổi giá trị trong các phép dời hình và hình học xạ ảnh nghiên cứu những khái niệm (điểm, đường thẳng, quan hệ liên thuộc, tỉ số kép) được bảo toàn trong một lớp các phép biến đổi xạ ảnh rộng lớn hơn. Song, các phép dời hình cũng như các biến đổi xạ ảnh chỉ là những trường hợp rất đặc biệt của các *biến đổi tôpô* tổng quát hơn nhiều: một biến đổi tôpô từ một hình hình học A

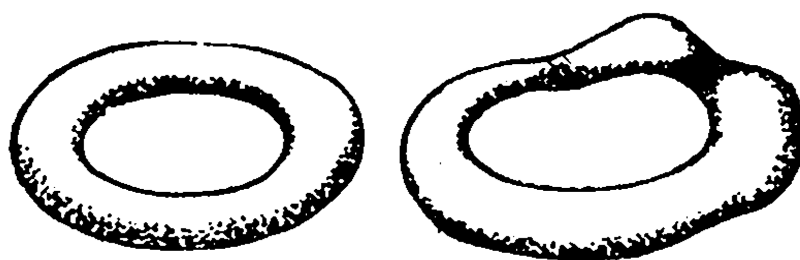
thành một hình khác A' được định nghĩa như là một tương ứng bất kỳ p ↔ p' giữa các điểm p của hình A và các điểm p' của hình A' có các tính chất sau đây:

1. *Một—một* (đơn trị hai chiều), nghĩa là mỗi điểm p của hình A được cho tương ứng với một và chỉ một điểm p' của hình A' và ngược lại.

2. *Liên tục hai phía* nghĩa là, nếu lấy hai điểm p và q của hình A và chuyển động p sao cho khoảng cách giữa p và q giảm dần vô hạn thì khoảng cách giữa các điểm p' và q' của hình A' cũng giảm dần vô hạn, và ngược lại.

Mỗi tính chất của hình hình học A còn được bảo toàn cho hình A' khi A chịu một biến đổi tôpô, được gọi là một tính chất tôpô của hình A. *Tôpô* là một ngành của hình học, khảo sát riêng các tính chất tôpô của các hình. Ta hãy tưởng tượng một hình nào đó được sao chép lại bởi một người hoàn toàn chưa có kinh nghiệm nhưng rất tận tâm. Anh ta làm cong đi (một cách không cố ý) các đường thẳng, làm sai lệch các góc, khoảng cách và diện tích; như thế thì tuy rằng trên bản vẽ lại, các tính chất mêtric và xạ ảnh của hình có thể bị thay đổi, nhưng các tính chất tôpô vẫn được giữ nguyên.

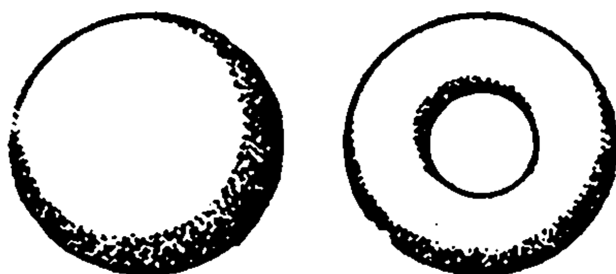
Những thí dụ trực quan nhất của biến đổi tôpô là các *phép biến dạng*. Ta hãy hình dung một hình như hình cầu hoặc hình tam giác được làm bằng một lớp cao su mỏng, rồi kéo căng ra hoặc bóp lại bằng nhiều cách khác nhau nhưng không làm rách nó hoặc không làm cho hai điểm khác nhau trùng nhau về mặt vật lý (việc làm cho hai điểm khác nhau ở trong trạng thái trùng nhau về mặt vật lý sẽ vi phạm điều kiện 1). Sự làm rách lớp cao su sẽ vi phạm điều kiện 2: quả vậy, khi xét hai điểm nằm ở hai phía khác nhau của vết rách, ta thấy khoảng cách giữa chúng lúc đầu có thể vô cùng nhỏ nhưng sau khi rách đã không còn như thế nữa).



H. 123. Các mặt tương đương tôpô

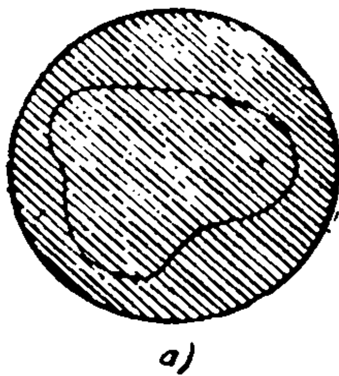
Hình ở trạng thái cuối cùng (sau các thao tác đã chỉ ra ở trên) sẽ tương ứng tôpô với hình ở trạng thái ban đầu. Tam giác có thể biến dạng thành một tam giác khác hoặc một đường tròn, hoặc một elip; vì thế các hình đã nêu sẽ có các tính chất tôpô giống nhau. Nhưng, không thể biến dạng hình tròn thành đoạn thẳng hoặc mặt cầu thành mặt xung quanh của hình trụ.

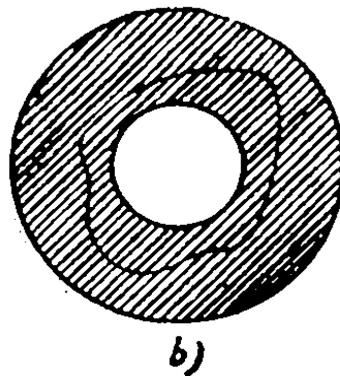
Song, khái niệm tổng quát về biến đổi tôpô còn rộng hơn khái niệm biến dạng. Chẳng hạn, nếu hình bị cắt trước khi biến dạng và sau khi biến dạng được dán lại theo đường cắt đó thì rút cục ta cũng có một biến đổi tôpô nào đó của hình ban đầu, tuy rằng biến đổi này có thể không phải là một biến dạng. Chẳng hạn, hai đường cong biểu thị trên H. 123 là tương đương tôpô với nhau và mỗi đường đều tương đương với đường tròn bởi vì ta có thể cắt chúng rồi đem cuộn và dán lại. Nhưng nếu không cắt ra thì không thể biến dạng đường cong này thành đường cong kia được.



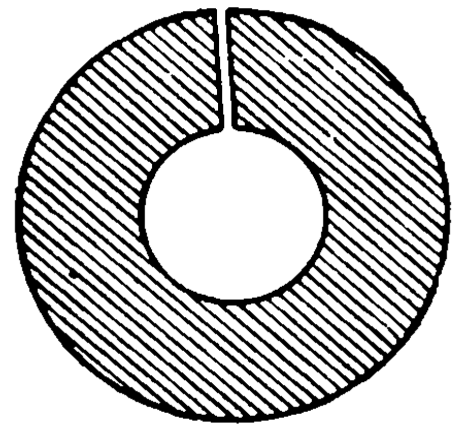
H. 124 Các mặt không tương đương tôpô

Các tính chất tôpô của các hình (giống như tính chất cho trong định lý Ơle hoặc các tính chất khác sẽ được xét đến dưới đây) đã được chú ý nhiều nhất trong nhiều công trình nghiên cứu toán học. Với một ý nghĩa nhất định thì đó là những tính chất hình học sâu xa nhất, cơ bản nhất vì chúng được bảo toàn ngay cả trong những biến đổi « sâu sắc » nhất.





H.125. Miền đơn liên và đa liên

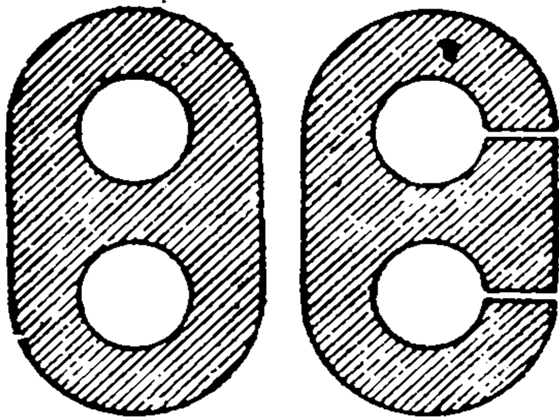


H. 126. Sau khi cắt, miền nhị liên thành miền đơn liên

2. Tính chất liên thông. Để có một thí dụ về các hình không tương đương tôpô, ta sẽ xét hai miền phẳng biểu thị trên H. 125. Hình thứ nhất gồm các điểm ở bên trong một hình tròn; hình thứ hai gồm tất cả các điểm nằm ở giữa hai đường tròn đồng tâm. Một đường cong kín bất kỳ nằm trong miền a có thể biến dạng liên tục hoặc « bị nén » thành một điểm *nhưng không vượt ra khỏi miền đó*. Một miền có tính chất như thế được gọi là *miền đơn liên*. Miền b là không đơn liên. Thí dụ, một đường tròn đồng tâm với hai đường tròn biên và nằm ở giữa chúng, không thể nén lại thành một điểm mà không vượt ra ngoài miền này, bởi vì trong khi biến dạng, đường cong sẽ phải đi qua tâm chung của các hình tròn mà điểm này không

thuộc vào miền đang xét. Miền không đơn liên được gọi là miền « đa liên ». Nếu ta cắt một miền nhị liên b dọc theo một bán kính như đã chỉ trên H. 126 thì miền thu được sẽ là miền đơn liên.

Nói chung, có thể tạo nên các miền có hai, ba hoặc nhiều « lỗ » hơn. Miền có hai lỗ được vẽ trên hình 127, muốn biến nó thành miền đơn liên chỉ cần cắt ở hai chỗ. Nếu phải cắt n chỗ (không chồng chéo lẫn nhau) từ biên này đến biên kia để biến một miền đa liên cho trước thành miền đơn liên thì ta nói rằng miền đó có *bậc liên thông n*. Bậc liên thông của một miền phẳng chính là một bất biến tôpô quan trọng của miền đó.

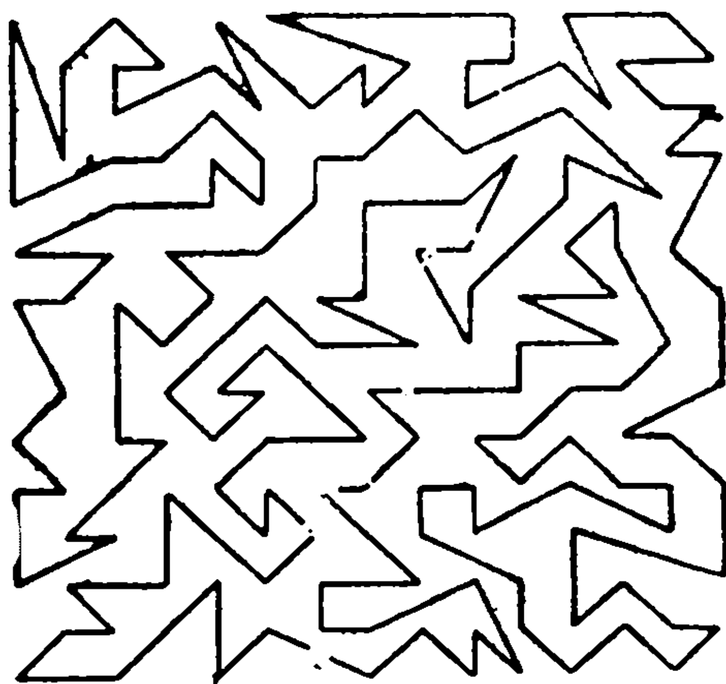


H.127. Giảm miền tam liên

§3. CÁC THÍ DỤ KHÁC VỀ ĐỊNH LÝ TÔPÔ

1. Định lý Jordan về đường cong kín. Trên mặt phẳng có một đường cong kín (không tự cắt ở mọi nơi). Ta sẽ xét xem tính chất nào của hình được bảo toàn trong trường hợp mặt phẳng chịu một biến dạng tùy ý như đã làm đối với lớp cao su mỏng. Độ dài của đường cong hoặc diện tích phần mặt phẳng mà nó giới hạn sẽ không được bảo toàn trong các biến dạng. Nhưng cấu hình đang xét có một tính chất tôpô đơn giản đến nỗi ta cho là tầm thường. *Một đường cong kín C đơn giản ở trên mặt phẳng sẽ chia mặt phẳng ra đúng hai miền, miền trong và miền ngoài.* Nói chính xác hơn, ta khẳng định như sau: các điểm của mặt phẳng được chia làm hai lớp – lớp A (các điểm ngoài)

và lớp B (các điểm trong) — sao cho có thể nối một cặp điểm bất kỳ thuộc vào cùng một lớp bằng một đường cong không cắt C, trong khi đó thì mọi đường cong nối hai điểm tùy ý thuộc hai lớp khác nhau nhất định phải cắt C. Điều khẳng định này là hoàn toàn hiển nhiên đối với đường tròn hoặc elip chẳng hạn; nhưng đã khó hình dung hơn đối với một đường cong phức tạp như hình dạng cầu kỳ của đa giác vẽ trên H.128



H. 128. Những điểm nào nằm ở trong đa giác này

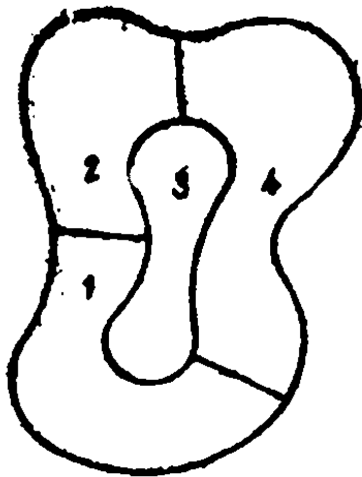
Định lý này đã được Kamil *Jordan* phát biểu đầu tiên (1838 – 1922) trong « Cours d' analyse» nổi tiếng mà qua đó, cả một thế hệ các nhà toán học đã lĩnh hội được một quan niệm hiện đại về sự chặt chẽ toán học. Chứng minh của Jordan không ngắn gọn, không đơn giản về mặt tư tưởng, nhưng điều rất lạ là chứng minh này chưa hoàn tất, còn phải gia công nhiều nữa mới bù đắp được những thiếu sót của nó. Những chứng minh chặt chẽ đầu tiên của định lý Jordan là rất phức tạp và khó hiểu đối với cả những người có trình độ toán học tốt. Những chứng minh tương đối đơn giản mãi gần đây mới được nghĩ ra. Một trong

« Giáo trình giải tích» (tiếng Pháp) — ND.

những trở ngại là tính khái quát cao của khái niệm đường cong «đơn giản đóng kín», nó rộng hơn rất nhiều so với khái niệm đa giác hoặc đường cong «trơn». Theo định nghĩa thì «đường cong đơn giản đóng kín» là một đường cong bất kỳ tương đương tôpô với đường tròn. Mặt khác, trước tiên cần có những định nghĩa logic cho những thuật ngữ như «bên trong» hoặc «bên ngoài» thì mới có được một chứng minh chặt chẽ. Việc phân tích những quan hệ và khái niệm nảy sinh ra trong mối liên hệ đó là nhiệm vụ lý thuyết có ý nghĩa quan trọng bậc nhất mà tôpô hiện đại có trách nhiệm chủ yếu trong việc thực hiện nhiệm vụ này. Song, cũng cần lưu ý rằng khi nghiên cứu các hiện tượng cụ thể trong lĩnh vực hình học, ta đã đưa vào không đúng chỗ các khái niệm mà tính khái quát vô hạn của chúng đã tạo nên những trở ngại không cần thiết. Chẳng hạn, nếu trở lại định lý Jordan thì đối với trường hợp các đường cong «tự truyền động tốt» — thí dụ như đối với các đa giác hoặc đối với các đường cong có tiếp tuyến biến thiên liên tục (chỉ gặp trong các bài toán quan trọng nhất) — thì chứng minh định lý được tiến hành rất đơn giản. Ta sẽ nêu chứng minh cho trường hợp đa giác ở phần phụ lục của chương này.

2. Bài toán bốn màu. Qua định lý Jordan vừa xét ở trên, có thể nghĩ rằng tôpô nghiên cứu việc chứng minh chặt chẽ cho những chân lý mà không một người khôn ngoan nào có thể nghi ngờ. Nhưng không phải hoàn toàn như vậy: có nhiều vấn đề có tính chất tôpô được phát biểu cực kỳ đơn giản mà trực giác lại không thể giải đáp được đầy đủ. Có thể lấy «bài toán bốn màu» nổi tiếng làm thí dụ.

Khi tô màu một bản đồ địa lý, người ta thường cố gắng phân phối màu giữa các nước sao cho hai nước



H. 129. Tô màu bản đồ

có biên giới chung được tô màu khác nhau. Bằng thực nghiệm đã thấy rằng một bản đồ bất kỳ dù có bao nhiêu nước, dù các nước được sắp xếp như thế nào, cũng có thể tô được theo qui tắc trên với không quá *bốn* màu. Dễ chứng tỏ với số màu ít hơn thì chưa đủ. H. 129 biểu diễn một hòn đảo giữa biển khơi; nó không thể tô được với số màu ít hơn bốn, bởi vì trên nó có bốn nước, mỗi nước tiếp giáp với cả ba nước còn lại.

Sự kiện cho đến nay còn chưa tìm thấy bản đồ nào cần phải tô đến quá bốn màu, gợi cho ta sự đúng đắn của định lý: *Trong một sự phân chia tùy ý mặt phẳng thành những miền không phủ lên nhau hoàn toàn hoặc phủ lên nhau một phần, bao giờ cũng có thể đánh dấu các miền đó bằng các chữ số 1, 2, 3, 4 sao cho các miền «kề nhau» được đánh dấu bởi các chữ số khác nhau*. Những miền «kề nhau» là những miền có một đoạn biên chung: hai miền chỉ có một điểm chung (hoặc thậm chí có một số hữu hạn điểm chung) như Kôlôrađô và Arizôna chẳng hạn sẽ không gọi là «kề nhau», vì sẽ không có sự lầm lẫn hoặc bất tiện nào, nếu tô các nước đó bởi cùng một màu.

Có cơ sở để cho rằng bài toán bốn màu đã được Miôbiux nêu ra đầu tiên năm 1840. Sau đó Morgan (năm 1850) và Keli (năm 1878) đã phát biểu bài toán này. «Chứng minh» của nó đã được Kempê tìm ra năm 1879, nhưng Khivut đã tìm ra chỗ sai trong lập luận của Kempê vào năm 1890. Xem kỹ chứng minh của Kempê, Khivut đã phát hiện thấy *năm* màu là luôn

luôn đủ (chứng minh định lý năm màu sẽ được nêu trong phụ lục chương này). Cho đến nay, tình hình vẫn cơ bản không thay đổi, dẫu rằng có sự cố gắng của nhiều nhà toán học lỗi lạc. *Đã chứng minh được* năm màu là đủ cho mọi bản đồ và *giả thiết* rằng bốn màu cũng đủ. Nhưng, cũng như trường hợp của định lý Fecma nổi tiếng, khi chưa có chứng minh hoặc một phản thí dụ nào được thừa nhận thì giả thuyết này vẫn còn là một trong những bài toán « lớn » chưa giải được. Ngoài ra, ta lưu ý rằng bài toán bốn màu đã được chứng minh là đúng cho những trường hợp đặc biệt khi số miền không vượt quá *ba mươi tám*. Từ đó thấy rõ rằng nếu định lý không đúng trong trường hợp tổng quát thì phản thí dụ sẽ không thể quá đơn giản.

Trong bài toán bốn màu đang xét, ta giả thiết bản đồ được vẽ trên mặt phẳng hoặc trên mặt cầu. Hai trường hợp này là tương đương. Quả vậy, mỗi bản đồ cho trước trên mặt cầu đều có thể trải trên mặt phẳng nếu ta khoét một lỗ nhỏ bên trong một miền A rồi trải phần còn lại của mặt cầu trên mặt phẳng như ta đã làm khi chứng minh định lý Ơle. Ở trên mặt phẳng, bản đồ thu được sẽ là « hòn đảo » gồm tất cả các miền không bị khoét đi và « biển » chỉ gồm có miền A. Mặt khác nếu thực hiện toàn bộ qui trình đó theo thứ tự ngược lại, ta có thể biến một bản đồ phẳng bất kỳ thành một bản đồ trên mặt cầu. Hơn nữa, bởi vì các biến dạng của các miền và các biên của chúng không có ảnh hưởng đến bài toán của chúng ta, cho nên có thể giả thiết rằng biên của mỗi miền là một đa giác đơn giản đóng kín gồm các cung hình tròn lớn. Nhưng, một bài toán « đã được điều chỉnh » như vậy mà vẫn không giải được. Ở đây, sự khó khăn (khác với định lý Jordan) không phụ thuộc vào tính khái quát của các khái niệm miền và đường cong. Nhân bài toán bốn màu,

ta lưu ý một tình hình đặc biệt là, đối với một số mặt loại *phức tạp* hơn mặt phẳng hoặc mặt cầu thì các định lý tương ứng lại đã được thực sự chứng minh. Điều này có vẻ vô lý. Việc phân tích các mặt phức tạp hơn (về phương diện hình học) lại dễ dàng hơn so với các mặt đơn giản! Thí dụ, người ta đã xác nhận rằng đối với mặt xuyến có hình « bánh vòng » (xem II.123) thì mọi bản đồ vẽ trên đó đều có thể tô được bằng *bảy* màu ; mặt khác, có thể hình dung ở trên đó những bản đồ gồm bảy miền sao cho mỗi miền tiếp giáp với sáu miền còn lại.

2. **Khái niệm thứ nguyên.** Khái niệm « số chiều » hoặc « thứ nguyên » không gây trở ngại gì đặc biệt khi ta đề cập đến những hình hình học đơn giản như điểm, đường, tam giác hoặc đa giác. Một điểm riêng biệt hoặc một tập hợp điểm bất kỳ có thứ nguyên O ; một đoạn thẳng có thứ nguyên 1 ; mặt tam giác hoặc mặt cầu có thứ nguyên 2. Tập hợp tất cả các điểm của hình lập phương có thứ nguyên 3. Song, nếu muốn mở rộng khái niệm thứ nguyên cho những tập hợp điểm loại tổng quát hơn thì cần có một định nghĩa chính xác. Chẳng hạn, phải gán cho tập hợp R, gồm các điểm trên trục x mà tọa độ x của chúng là những số *hữu tỉ*, thứ nguyên nào? Tập hợp các điểm hữu tỉ trên trục x trù mật khắp nơi, vì thế có lẽ nên gán cho nó thứ nguyên 1 xem như một đoạn của đường thẳng. Mặt khác, giữa hai điểm hữu tỉ bất kỳ tồn tại một « lỗ » vô tỉ giống như giữa hai điểm bất kỳ của một tập hợp hữu hạn, vậy thì lại thấy nên gán cho nó thứ nguyên O! Đối với thứ nguyên của các tập hợp kỳ lạ do Kantor khảo sát lần đầu tiên thì vấn đề còn phức tạp hơn. Từ đoạn đơn vị $0 \leqslant x \leqslant 1$ ta tách ra một phần ba ở giữa (một khoảng) tức là tách ra tất cả những điểm x thỏa mãn bất đẳng thức $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$. Ta biểu thị tập hợp điểm còn lại là C_1. Tập hợp C_1 gồm có hai đoạn ; bây giờ ta tách khỏi mỗi đoạn một phần ba ở giữa của nó và biểu thị tập hợp còn lại là C_2. Lặp lại qui trình này một lần nữa bằng cách tách ra ở cả bốn đoạn thẳng các một phần ba ở giữa của chúng, ta được C_3. Làm tiếp như vậy

ta được C_4, C_5, C_6, ... Ta biểu thị C là tập hợp điểm còn lại sau khi đã tách ra tất cả các phần ba ở giữa; nói cách khác, C là một tập hợp điểm đồng thời thuộc vào tất cả các tập hợp C_1, C_2, C_3, ... Trong thao tác đầu thì một khoảng dài $\frac{1}{3}$ được tách ra; trong thao tác thứ hai thì hai khoảng mỗi khoảng dài $\frac{1}{3^2}$ được tách ra, v.v..., tổng độ dài tất cả các khoảng đã tách ra bằng:

$$1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3^2}+2^2\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots\right)$$

Chuỗi vô hạn ở trong ngoặc là một cấp số nhân, tổng của nó bằng $\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$; như vậy, tổng độ dài các đoạn đã lấy đi là 1. Nhưng không phải mọi điểm của đoạn thẳng đã bị tách đi: tập hợp C là không rỗng. Chẳng hạn, mọi điểm mút của những đoạn đã bị lấy đi:

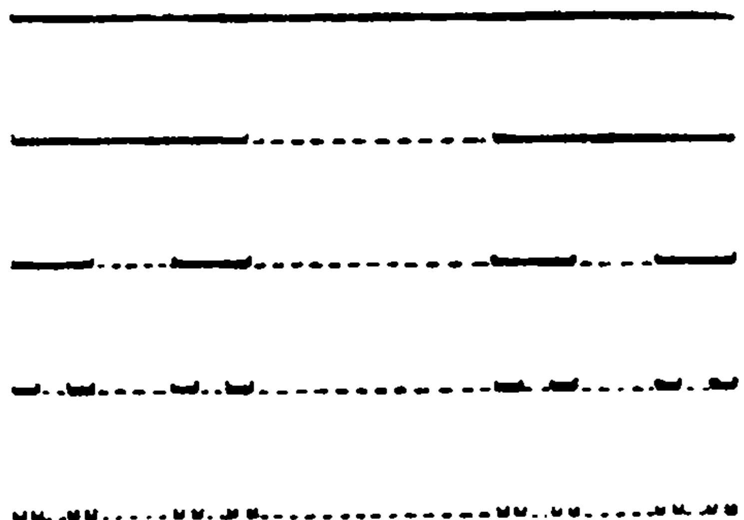
$$\frac{1}{3},\frac{2}{3};\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{7}{9},\frac{8}{9};\ldots$$

đều thuộc vào C. Có thể chứng minh dễ dàng C chứa tất cả các số X mà phân tích của chúng có dạng:

$$x=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^3}+\ldots+\frac{a_n}{3^n}+\ldots$$

trong đó mọi a_n là 0 hoặc 2; còn các số a_n trong phân tích tương tự của mỗi điểm đã tách đi, đều bằng 1.

Tập hợp C có thứ nguyên như thế nào? Có thể cải Liên quá trình đường chéo nhờ đó ta đã chứng minh tính không đếm được của tập hợp các số thực, để cũng thu được kết quả như vậy cho tập hợp C. Do đó,



H. 130. Tập hợp Kantor

tất nhiên phải kết luận tập hợp C có thứ nguyên 1. Mặt khác, C không chứa một đoạn nào dù nhỏ nhất giống như một tập hợp hữu hạn bất kỳ; điều này làm cho C gần với các tập hợp có thứ nguyên 0. Cũng như vậy, nếu từ một điểm hữu tỉ hoặc từ mỗi điểm của tập hợp Kantor trong mặt phẳng x, y ta dựng đường vuông góc với trục x có độ dài đơn vị (theo hướng dương của y), ta sẽ được các tập hợp mà ta còn nghi hoặc không biết nên gán cho chúng thứ nguyên 2 hay 1.

Lần đầu tiên, PoăngCarê (năm 1912) đã lưu ý đến sự cần thiết phải phân tích sâu sắc hơn nữa và định nghĩa chính xác hơn nữa khái niệm thứ nguyên. PoăngCarê đã nhận thấy rằng một đường thẳng hoặc một đường cong có thứ nguyên 1, bởi vì có thể tách hai điểm bất kỳ trên đó bằng cách lấy đi một điểm duy nhất (một tập hợp có thứ nguyên 0); mặt phẳng cũng có thứ nguyên 2 với lý do để tách hai điểm trên mặt phẳng cần phải lấy đi toàn bộ một đường cong kín (một tập hợp có thứ nguyên 1). Điều này dẫn đến một tư tưởng cho là thứ nguyên có bản chất « qui nạp »; phải gán cho một « không gian » nào đó thứ nguyên n nếu hai điểm của nó được gián cách nhau khi lấy đi một tập con các điểm có thứ nguyên n − 1 (nhưng nếu lấy đi một tập con thứ nguyên nhỏ hơn thì chưa đủ). Thật ra, định nghĩa qui nạp loại này đã có ẩn tàng trong « Khởi đầu » của Ơclid, trong đó hình một − chiều được định nghĩa là một cái gì đó mà biên của nó chỉ gồm những điểm; hình hai chiều là một cái gì đó mà biên của nó gồm những đường; hình ba-chiều là một cái gì đó mà biên của nó gồm các mặt.

Những năm gần đây, một lý thuyết phong phú đã được phát triển — lý thuyết thứ nguyên. Định nghĩa thứ nguyên được bắt đầu bằng việc giải thích ý nghĩa của thuật ngữ « tập hợp điểm có thứ nguyên O ». Một tập hợp điểm *hữu hạn* bất kỳ có tính chất là mỗi điểm của nó đều có thể bao hàm trong một miền không gian tùy ý nhỏ và không có các điểm của tập hợp ở trên biên của miền. Tính chất này được thừa nhận làm định nghĩa của thứ nguyên O. Để cho tiện, ta qui ước rằng một tập hợp rỗng có thứ nguyên −1. Như vậy thì một tập hợp S sẽ có thứ nguyên O nếu nó không có thứ nguyên −1 (tức là nếu S có ít nhất một điểm) và nếu mỗi điểm của S đều có thể bao hàm được trong một miền nhỏ tùy ý mà biên của nó cắt S theo một tập hợp thứ nguyên −1 (tức là hoàn toàn không chứa điểm nào của S). Chẳng hạn, tập hợp

các điểm hữu tỉ trên đường thẳng có thứ nguyên O bởi vì mỗi điểm hữu tỉ có thể coi như tâm của một khoảng nhỏ tùy ý có các mút vô tỉ. Tập hợp Kanto C cũng có thứ nguyên O, bởi vì nó được tạo nên bằng cách lấy đi một tập hợp điểm trù mật khắp nơi trên đường thẳng, tương tự như tập hợp điểm hữu tỉ.

Như vậy, ta đã định nghĩa khái niệm «thứ nguyên − 1» và «thứ nguyên O». Bây giờ sẽ hiểu được dễ dàng, thế nào là «thứ nguyên 1»: ta nói tập hợp S có «thứ nguyên 1» nếu nó không phải là thứ nguyên −1 và thứ nguyên O và nếu mỗi điểm của S đều có thể bao hàm trong một miền nhỏ tùy ý mà biên của nó cắt S theo một tập hợp thứ nguyên O. Một đoạn thẳng sẽ có tính chất như thế bởi vì biên của mỗi khoảng là một cặp điểm tức là một tập hợp thứ nguyên O theo định nghĩa trước. Tiếp tục như vậy, ta có thể định nghĩa tiếp thế nào là thứ nguyên 2, thứ nguyên 3 v.v... trong đó mỗi định nghĩa sau dựa vào định nghĩa trước nó.

Như vậy, ta nói rằng tập hợp S có thứ nguyên n, nếu nó không có thứ nguyên nhỏ hơn và nếu mỗi điểm của S có thể bao hàm được trong một miền nhỏ tùy ý mà biên của nó cắt S theo một tập hợp thứ nguyên n − 1. Thí dụ, mặt phẳng có thứ nguyên 2 bởi vì một điểm bất kỳ của mặt phẳng có thể bao hàm được trong một hình tròn bán kính nhỏ tùy ý mà biên của nó có thứ nguyên 1*. Không thể có một tập hợp điểm nào có thứ nguyên lớn hơn 3 trong không gian thông thường, bởi vì một điểm bất kỳ của không gian là tâm của một hình cầu nhỏ tùy ý mà biên của nó có thứ nguyên 2. Song, trong toán học hiện đại thuật ngữ «không gian» được dùng với nghĩa tổng quát hơn; nó biểu thị một hệ thống tùy ý các sự vật, trong hệ thống đó có đưa vào khái niệm «khoảng cách»

---

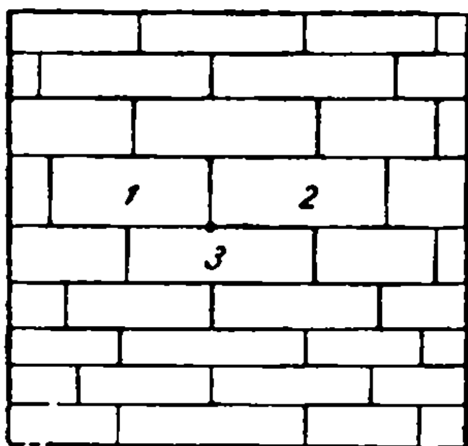
* Điều đã nói không có nghĩa là chứng minh cho mặt phẳng có thứ nguyên 2 (theo định nghĩa) của chúng ta đã kết thúc: còn phải chứng minh biên của hình tròn (đường tròn) có thứ nguyên 1 và bản thân mặt phẳng không có thứ nguyên 0 và 1. Có thể chứng minh những khẳng định đó cũng như những khẳng định tương tự cho các thứ nguyên bậc cao. Mọi lập luận trước đó chứng tỏ định nghĩa tổng quát đã nêu ở trên không mâu thuẫn với ý nghĩa thông thường.

hoặc «lân cận»; những «không gian» trừu tượng loại này có thể có thứ nguyên lớn hơn 3. *Không gian Đécac n-chiều* là một thí dụ đơn giản, «điểm» của nó là một hệ n số thực lấy theo một thứ tự xác định :

$$P = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$Q = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

Có thể chứng minh rằng không gian này có thứ nguyên n. Một không gian không có thứ nguyên n, dù n lớn đến đâu, được gọi là không gian có thứ nguyên vô hạn. Ta đã biết nhiều thí dụ về những không gian như vậy.

Trong lý thuyết thứ nguyên, ta đã chứng minh được một tính chất cực kỳ lý thú của các hình hai thứ nguyên, ba thứ nguyên và nói chung n thứ nguyên. Ta bắt đầu từ trường hợp hai thứ nguyên. Nếu một hình hai thứ nguyên (chiều) đơn giản nào đó được phân thành những «ô» đủ nhỏ (giả thiết rằng mỗi ô chứa cả biên của nó), thì tất phải tìm được những điểm *ít nhất thuộc về cả ba ô dù hình dạng các ô đã chọn như thế nào*. Đồng thời, *có những* sự phân chia các hình thành ô sao cho không có một điểm nào của hình thuộc vào *quá ba ô*. Chẳng hạn, nếu hình hai thứ nguyên đang xét là hình vuông (H. 131) thì tất phải có những điểm thuộc vào cả ba ô 1, 2, 3 nhưng với cách phân chia như đã chỉ trên hình vẽ thì sẽ không có điểm nào thuộc quá ba ô. Hoàn toàn như vậy, trong không gian ba chiều, ta có thể chứng minh nếu một vật thể nào đó được phân chia thành những ô khá nhỏ thì sẽ có những điểm thuộc vào ít nhất bốn ô, đồng thời có thể chọn ra những cách phân chia để không có điểm nào thuộc vào quá bốn ô.



H. 131. Định lý về sự phủ

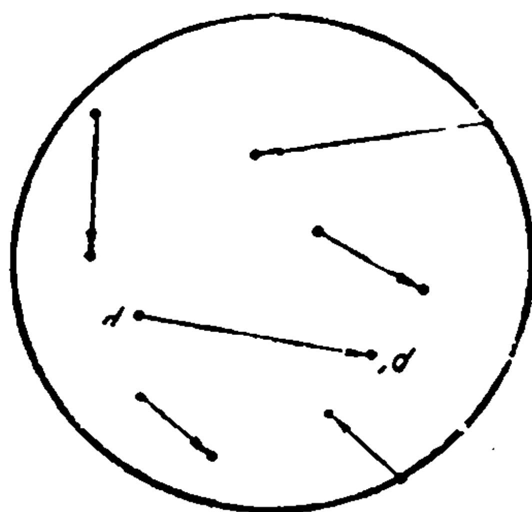
Tất cả những điều đó dẫn ta đến định lý sau đây, do A. Lơbeg và Braue phát biểu: *Nếu một hình n – chiều được phân chia thành những ô khá nhỏ thì tất sẽ có những điểm của hình thuộc vào ít nhất n + 1 ô ; đồng thời có thể chỉ ra những cách phân chia sao cho không có điểm nào của hình thuộc về*

quá n + 1 ô. Định lý này đặc trưng cho thứ nguyên của hình đang xét: mọi hình mà định lý được nghiệm đúng là hình n - chiều, những hình khác sẽ có thứ nguyên khác n. Vì lý do đó mà định lý vừa nêu có thể được chọn làm định nghĩa thứ nguyên (như một số tác giả đã làm)

Thứ nguyên của một hình thuộc vào số các tính chất tôpô của hình đó: hai hình có số chiều khác nhau không thể tương đương với nhau về mặt tôpô. Trong vấn đề này, có bao hàm một định lý đặc biệt về « tính bất biến của thứ nguyên »: muốn đánh giá đúng nó, cần nhớ lại một định lý khác nói rằng tập hợp các điểm của hình vuông có cùng lực lượng với tập hợp các điểm của một đoạn thẳng). Sự tương ứng giữa các điểm được xác lập trong chứng minh định lý này không phải là tương ứng tôpô bởi vì yêu cầu về tính liên tục bị vi phạm.

4. Định lý về điểm bất động. Định lý về « điểm bất động » có vai trò quan trọng trong những ứng dụng của tôpô vào các ngành toán học khác. Định lý Braue trình bày dưới đây là một thí dụ điển hình. Về mặt trực giác nó kém « hiển nhiên » hơn các định lý tôpô khác.

Ta xét một đĩa tròn ở trên mặt phẳng. Ta hiểu đó là phần trong của một hình tròn nào đó cùng với biên của nó (đường tròn). Ta giả thiết toàn bộ đĩa chịu một biến đổi liên tục nào đó (không bắt buộc phải là biến đổi một — một), trong đó mỗi điểm của đĩa vẫn còn là một điểm của đĩa tuy rằng có thay đổi vị trí. Chẳng hạn, nếu hình dung đĩa làm bằng cao su mỏng, ta có thể bóp, kéo căng, uốn, bẻ gập — nói tóm lại có thể biến dạng tùy ý cốt sao các điểm của đĩa không vượt ra ngoài vị trí ban đầu của nó. Còn có thể hình dung một chất lỏng

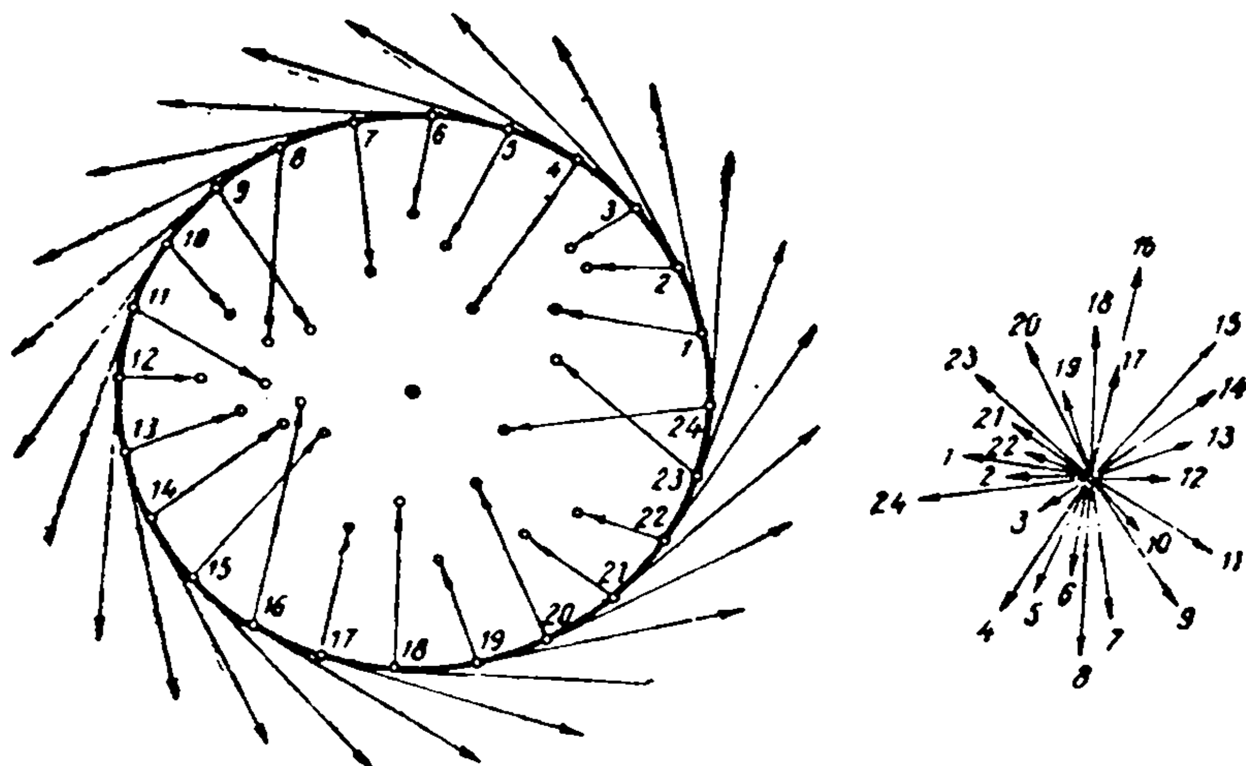


H. 132. Các vectơ biến đổi.

đề trong cốc được chuyển động thế nào đó, sao cho các phần tử ở trên bề mặt thoáng vẫn ở trên bề mặt đó trong suốt thời gian chuyển động; khi đó, tại mỗi thời điểm xác định, vị trí của các phần tử trên mặt thoáng sẽ xác định một biến đổi liên tục nào đó của sự phân bố chúng lúc ban đầu. Định lý Braue khẳng định: *Mỗi biến đổi liên tục loại này giữ lại ít nhất một điểm bất động;* nói cách khác, có ít nhất một điểm mà vị trí của nó sau biến đổi sẽ trùng với vị trí của nó trước biến đổi (trong thí dụ chất lỏng thì các điểm bất động phụ thuộc vào thời điểm đã chọn; đặc biệt, nếu chuyển động là quay tròn đơn giản thì tại mọi thời điểm, điểm bất động sẽ là tâm). Chứng minh sự tồn tại điểm bất động trình bày sau đây là một thí dụ rất điển hình về lập luận thường dùng trong tôpô.

Xét đĩa trước và sau khi biến đổi và giả thử rằng không tồn tại điểm bất động nào, tức là sau biến đổi một điểm bất kỳ của đĩa sẽ thành một điểm *khác* của đĩa. Ta cho ứng với mỗi điểm P của đĩa ở vị trí ban đầu của nó, một mũi tên hoặc « một vectơ biến đổi » PP', trong đó P' là điểm mà P chuyển đến sau biến đổi. Từ mỗi điểm của đĩa đều có một mũi tên như vậy bởi vì mọi điểm của đĩa đều chuyển động. Bây giờ ta xét mọi điểm của đường tròn biên cùng với các vectơ biến đổi tương ứng. Tất cả các vectơ này đều hướng về phía trong của hình tròn, bởi vì theo giả thiết không có điểm nào vượt ra ngoài giới hạn của đĩa. Ta bắt đầu từ một điểm P nào đó nằm trên đường tròn biên và đi dọc đường tròn đó theo ngược chiều kim đồng hồ. Khi đó hướng của vectơ biến đổi sẽ thay đổi, bởi vì những điểm khác nhau của biên sẽ tương ứng với các vectơ đó (sau khi tịnh tiến, chúng song song) xuất phát từ cùng một điểm nào đó của mặt phẳng (H. 133). Dễ nhận thấy

rằng khi ta đi một lần khắp hình tròn từ điểm P_1 đến điểm P_2 thì vectơ tương ứng sẽ quay về vị trí ban đầu sau một loạt phép quay. Số các vòng quay đầy đủ mà vectơ của ta đã thực hiện được gọi là *chỉ số* của đường tròn biên đang xét. Nói chính xác hơn, ta định nghĩa chỉ số là tổng đại số các biến thiên khác nhau ở trong góc của các vectơ, với qui ước rằng mọi phép quay



H. 133. Để chứng minh định lý Braue

riêng theo chiều kim đồng hồ được viết dấu (—), ngược chiều kim đồng hồ được viết dấu (+). Chỉ số là kết quả tổng cộng, bằng một trong các số 0, ± 1, ± 2, ± 3,... tương ứng với các phép quay tổng cộng 0^0, ± 360^0, ± 720^0,... Bây giờ ta khẳng định rằng chỉ số của đường tròn biên bằng đơn vị, tức là phép quay tổng cộng của vectơ biến đổi tạo nên một vòng đầy đủ theo hướng dương. Trước hết, ta nhắc lại một lần nữa rằng vectơ biến đổi có gốc ở một điểm của đường tròn biên tất phải hướng vào phía trong hình tròn mà không

hướng theo tiếp tuyến. Nếu giả thử phép quay tổng cộng của vectơ biến đổi khác với phép quay tổng cộng của *vécto tiếp tuyến* (phép quay này đúng bằng 360° bởi vì vectơ tiếp tuyến tất nhiên phải quay một vòng đầy đủ) thì hiệu giữa các phép quay tổng cộng của vectơ tiếp tuyến và vectơ biến đổi sẽ bằng bội của 360°, nhưng không bằng 0. Do đó, khi đi vòng quanh hình tròn thì vectơ biến đổi ít nhất phải quay một vòng đầy đủ xung quanh vectơ tiếp tuyến: vì cả hai vectơ đều biến đổi liên tục cho nên tại một điểm nào đó của đường tròn thì hướng của hai vectơ phải bằng nhau. Nhưng như ta đã thấy, điều này không thể xảy ra được.

Bây giờ ta xét một đường tròn đồng tâm với biên của đĩa có bán kính nhỏ hơn và cũng xét những vectơ biến đổi tương ứng. Đối với đường tròn mới này thì chỉ số tất nhiên cũng bằng đơn vị. Thực vậy, khi chuyển từ đường tròn biên sang đường tròn mới thì chỉ số phải thay đổi liên tục bởi vì hướng của bản thân các vectơ biến đổi cũng thay đổi liên tục. Nhưng, chỉ có thể nhận những giá trị nguyên làm chỉ số, vì thế nó phải bằng đơn vị; quả vậy, việc chuyển từ đơn vị đến một số nguyên bất kỳ khác buộc phải có một bước nhảy, tức là tính liên tục bị xóa bỏ (một lập luận toán học rất điển hình: một đại lượng biến thiên liên tục nhưng chỉ nhận giá trị nguyên thì đại lượng đó không đổi). Vậy ta có thể tìm được một đường tròn nhỏ tùy ý đồng tâm với đường tròn biên mà chỉ số bằng đơn vị. Nhưng điều này không thể có được, bởi vì tính liên tục của biến đổi, các vectơ biến đổi ở trong một hình tròn đủ nhỏ phải khác rất ít so với vectơ ở tâm của hình. Bởi vậy khi đi vòng quanh hình tròn thì một vectơ như vậy có thể có một phép quay tổng cộng nhỏ hơn 10° chẳng hạn, nếu bán kính của đường tròn đủ nhỏ. Nhưng như

thế thì chỉ số của hình tròn này (phải là số nguyên) không thể khác 0. Mâu thuẫn phát hiện được chứng tỏ giả thiết về sự không có điểm bất động trong các biến đổi phải bị loại. Như vậy, định lý đã được chứng minh.

Định lý về các điểm bất động không những chỉ đúng đối với đĩa tròn mà tất nhiên còn đúng với tam giác, với hình vuông và với mọi hình là biến đổi của đĩa tròn qua biến đổi tôpô. Thực vậy, nếu một hình A nào đó, là biến đổi của một đĩa tròn qua một biến đổi như thế, có thể biến đổi thành chính nó mà không có điểm bất động thì bản thân nó đã xác định một biến đổi tôpô của đĩa tròn thành chính nó mà không có điểm bất động. Điều này không thể xảy ra. Định lý còn được mở rộng cho các hình ba chiều — hình cầu hoặc hình lập phương — tuy rằng việc chứng minh không đơn giản.

Mặc dù định lý Braue về các điểm bất động trong hình tròn, về trực giác, không phải là hoàn toàn hiển nhiên, nhưng dễ thấy rằng nó là hệ quả trực tiếp của một định lý khá hiển nhiên sau: *Không thể ánh xạ đĩa tròn vào đường tròn biên của nó sao cho mỗi điểm của đường tròn này là bất động.* Ta sẽ chứng minh sự tồn tại một ánh xạ liên tục không có điểm bất động của hình tròn vào chính nó nhưng lại mâu thuẫn với định lý vừa nêu. Ta giả thiết có tồn tại một biến đổi liên tục loại đó P ⟷ P'. Như vậy, với mỗi điểm P của đĩa ta vẽ một vectơ với gốc là điểm P', đi qua P và kết thúc ở điểm P* là chỗ nó cắt đường tròn biên. Lúc đó, biến đổi PP* sẽ là một ánh xạ liên tục của cả đĩa vào đường tròn biên, nó giữ lại bất động mọi điểm của đường tròn đó. Ta sẽ bác bỏ điều này. Có thể dùng lập luận tương tự để chứng minh định lý Braue đối với hình cầu và hình lập phương

Mặt khác, cũng dễ thấy, đối với một số hình, có thể có những ánh xạ liên tục lên chính nó mà không có điểm bất động.

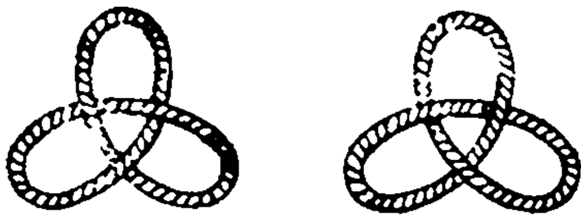
Thí dụ, miền hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có thể quay xung quanh tâm của nó một góc bội của 360^0; đó là một biến đổi liên tục của miền vào chính nó

nhưng không có điểm bất động. Một biến đổi như thế cũng có thể thực hiện trên một mặt cầu bằng cách ứng mỗi điểm của nó với điểm đối tâm. Nhưng, nếu cũng áp dụng phương pháp như trong trường hợp của đĩa tròn thì có thể chứng minh được dễ dàng một biến đổi liên tục của mặt cầu, không biến đổi điểm nào thành điểm đối tâm cả (mỗi biến dạng nhỏ chẳng hạn).tất sẽ có những điểm bất động.

Những định lý về điểm bất động kể trên cho ta một phương pháp ưu việt để chứng minh nhiều « định lý tồn tại » trong những lĩnh vực khác nhau của toán học, mà đặc tính hình học của chúng thường là không hiển nhiên. Có thể lấy định lý PoăngCarê được ông phát biểu (mà không chứng minh) ít lâu trước khi mất (năm 1912) làm một thí dụ đặc biệt. Từ định lý này trực tiếp suy ra sự tồn tại của vô số quĩ đạo tuần hoàn trong bài toán giới nội của ba vật thể. PoăngCarê không lý giải được điều dự đoán của mình. Chứng minh của sự kiện đặc biệt này đã được nhà toán học Mỹ G. Đ. Brikhốf tìm ra sau đó một năm. Từ đó, các phương pháp tôpô đã được áp dụng thành công nhiều lần vào việc nghiên cứu trạng thái chất lượng của các hệ động học.

5. Nút. Ta nhận thấy những bài toán khó có tính chất tôpô thường nảy sinh ra khi ta nghiên cứu các nút. Nút được tạo thành khi từ một đoạn dây ta làm những vòng rồi luồn các đầu dây qua những vòng đó, sau hết nối các đầu dây lại. Một đường cong kín làm bằng dây là một hình hình học, các tính chất quan trọng của nó không thể thay đổi nếu ta không buộc chặt hoặc xoắn chặt dây? Nhưng liệu có thể tìm ra một đặc trưng nội tại giúp ta bằng cách nào đó phân biệt các đường cong « có nút » với những đường cong « không có nút » như kiểu đường tròn? Câu trả lời không đơn giản và việc phân tích về mặt toán học cặn kẽ các nút loại khác nhau còn phức tạp hơn. Đã gặp phải những khó khăn ngay

từ những bước đi đầu tiên theo phương hướng đó. Bạn đọc hãy nhìn vào hai nút giống hình ba lá vẽ trên H. 134. Chúng hoàn toàn đối xứng với nhau và là những « ảnh xạ gương », chúng tương

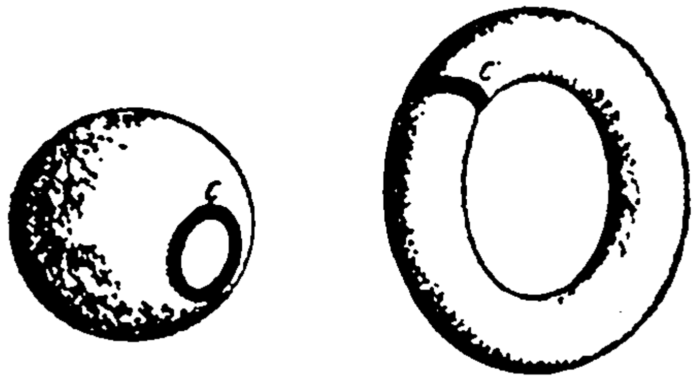


H. 134. Các nút tương đương tôpô nhưng không biến đổi lẫn nhau được.

đương tôpô nhưng không toàn đẳng với nhau. Nảy ra bài toán: có thể biến dạng một nút này thành một nút khác nhờ một phép dời hình liên tục hay không? Câu trả lời là phủ định, chứng minh đòi hỏi phải nắm được rất vững kỹ thuật tôpô và phải có kiến thức vượt ra khỏi phạm vi cuốn sách này.

§ 4. SỰ PHÂN LOẠI CÁC MẶT VỀ PHƯƠNG DIỆN TÔPÔ

1. Loại mặt. Nhiều vấn đề đơn giản, khá quan trọng đã được làm sáng tỏ trong khi nghiên cứu các mặt hai chiều. Chẳng hạn, ta so sánh mặt cầu với mặt xuyến. Nhìn vào H. 135 có thể phát hiện ngay những nét



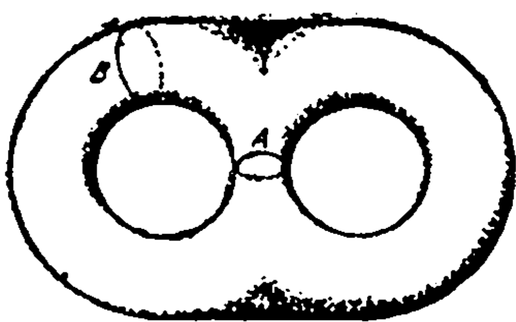
H. 135. Các lát cắt trên mặt cầu và mặt xuyên.

khác biệt: trên mặt cầu cũng như trên mặt phẳng, một đường cong kín C chia mặt thành hai phần, nhưng trên mặt xuyến, tồn tại những đường cong kín như thế (C' chẳng hạn) không chia mặt thành hai phần. Nếu ta nói rằng đường cong C chia mặt cầu thành hai phần thì điều đó có nghĩa là khi cắt mặt cầu theo đường

cong C ta được hai mảnh không liên thông với nhau, hoặc nói cách khác, có thể tìm được hai điểm của mặt cầu sao cho mọi đường cong ở trên mặt cầu nối hai điểm đó tất yếu phải cắt đường cong C. Trái lại, nếu cắt mặt xuyến theo đường cong C' thì sau khi cắt mặt không bị phân chia, ta có thể nối hai điểm bất kỳ của nó bằng một đường cong không có điểm chung với C'. Sự khác biệt vừa nêu chứng tỏ rằng mặt cầu và mặt xuyến không phụ thuộc vào cùng một lớp mặt về phương diện tôpô: mặt xuyến không thể biến thành mặt cầu bằng tôpô.

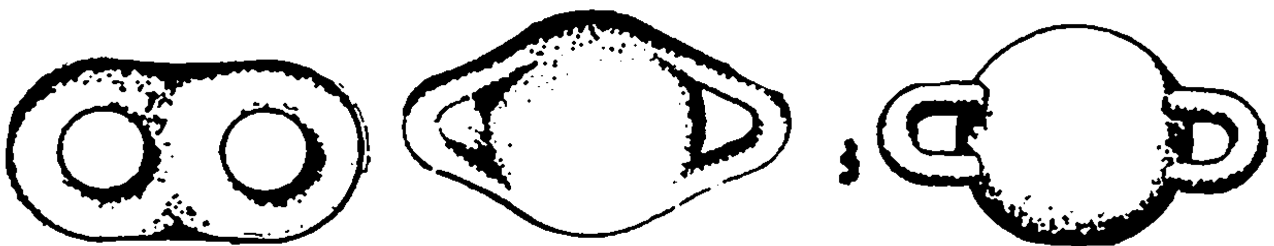
Bây giờ ta xét một mặt có hai «lỗ» được vẽ trên H.136. Trên mặt này, có thể vẽ hai đường cong kín A và B mà không chia mặt thành từng phần. Trái lại, khi vẽ hai đường cong như vậy trên mặt xuyến thì mặt này bị chia thành hai phần. Mặt khác, ba đường cong kín tùy ý sẽ phân chia mặt có hai lỗ thành từng phần.

Tất cả những điều đó gợi ý ta đưa ra khái niệm *loại* của mặt; loại của mặt là số lớn nhất các đường cong kín đơn giản không cắt nhau có thể vẽ được trên mặt mà không phân chia mặt thành từng phần. Loại của mặt cầu bằng 0, loại của mặt xuyến bằng 1, loại của mặt vẽ trên H.136 bằng 2. Mặt có p lỗ sẽ có loại p. Loại là một bất biến tôpô của một mặt: nó không thay đổi khi mặt biến dạng. Đảo lại, có thể chứng minh (ta không nêu chứng minh này ở đây) nếu hai mặt đóng kín có cùng một loại thì mặt này có thể biến dạng thành mặt kia; bởi vậy, loại p = 0, 1, 2,... của một mặt đóng kín đặc trưng hoàn toàn cho một lớp tôpô mà mặt đó



H.136. Một mặt loại 2

thuộc vào (ở đây, ta chỉ xét những mặt « hai phía » thông thường). Ở mục 3 chương này ta cũng xét cả những mặt « một phía ». Thí dụ, mặt có hai « lỗ » vừa xét và mặt cầu có hai « quai » vẽ trên hình 137 là hai mặt kín loại 2, ta thấy rằng mỗi mặt đó có thể biến dạng thành mặt kia. Vì mặt có p lỗ hoặc mặt cầu có p « quai » tương đương với nó là các mặt loại p, cho nên một mặt bất kỳ trong số đó có thể được chọn làm « đại diện tôpô » cho tất cả các mặt kín loại p.



H.137. Các mặt loại 2

2. Đặc trưng Ơle của một mặt. Ta giả thiết một mặt kín S loại p được phân chia thành một số miền nào đó: có thể tìm được sự phân chia như vậy nếu ta đánh dấu trên S một loạt « các đỉnh » và nối chúng với nhau bởi các cung đường cong. Ta sẽ chứng minh, trong trường hợp này thì:

$$V - E + F = 2 - 2p \qquad (1)$$

trong đó V — số đỉnh, E — số cung và F — số miền. Số 2 — 2p được gọi là *đặc trưng Ơle* của một mặt. Như ta đã thấy, đối với mặt cầu thì $V - E + F = 2$ phù hợp với công thức (1), bởi vì mặt cầu có loại p bằng 0.

Để chứng minh công thức tổng quát (1), ta hình dung S là mặt cầu p lỗ. Như ta đã nhấn mạnh, có thể biến dạng liên tục một mặt loại p tùy ý để nó biến thành mặt cầu S, trong khi biến dạng thì $V - E + F$ và $2-2p$ không thay đổi. Ta sẽ chọn một biến dạng liên tục sao cho các đường cong kín A_1, A_2, B_1, B_2,... mà theo đó

các quai được nối liền với mặt cầu là trùng với các cung của cách phân chia đã cho (H. 138 minh họa qui trình đã nêu đối với trường hợp $p = 2$). Bây giờ ta cắt mặt S theo các đường cong A_2, B_2,... và kéo thẳng các quai ra. Mỗi quai có một đầu tự do giới hạn bởi các đường cong mới A^*, B^*,..., đầu này có số đỉnh và cung cũng bằng với số đã có trên A_2, B_2,... tương ứng.



H. 138. Dùng cho đặc trưng Ơle của các mặt

Số $V - E + F$ không thay đổi trong khi cắt, bởi vì không sinh ra các miền mới và số đỉnh mới sinh ra lại bằng số cung mới sinh ra. Sau đó ta tiếp tục biến dạng mặt bằng cách ấn cho bẹp các quai thừa ra vào mặt cầu. Cuối cùng, ta được một mặt cầu có 2p lỗ. Vì $V - E + F$ bằng 2 đối với mọi sự phân chia một mặt cầu đầy đủ, cho nên đối với mặt cầu 2p lỗ của ta thì $V - E + F = 2 - 2p$. Đẳng thức này dĩ nhiên cũng đúng cho mặt cầu có p quai đầu tiên. Hình 121 thể hiện sự áp dụng công thức (1) vào mặt S gồm các đa giác phẳng. Có thể biến dạng tôpô mặt này thành mặt xuyến tức là loại p của nó bằng 1, vì thế $2 - 2p = 2 - 2 = 0$. Theo công thức (1) ta có:

$$V - E + F = 16 - 32 + 16 = 0$$

3. Mặt một phía. Mỗi mặt thông thường đều có hai phía. Các mặt kín như mặt cầu hoặc mặt xuyến và những mặt có biên chẳng hạn như mặt dĩa hoặc mặt xuyến đã tách đi một bộ phận, đều thuộc loại mặt

hai phía. Muốn phân biệt dễ dàng hai phía của cùng một mặt ta có thể tô cho chúng các màu khác nhau. Nếu mặt là đóng kín thì không nhận thấy được những màu khác nhau theo các đường cong đó. Giả thử có một con kiến bò trên một mặt như vậy và có một cái gì đó ngăn cản nó không bò qua các đường biên cong, khi đó con kiến luôn luôn ở trên một phía của mặt.

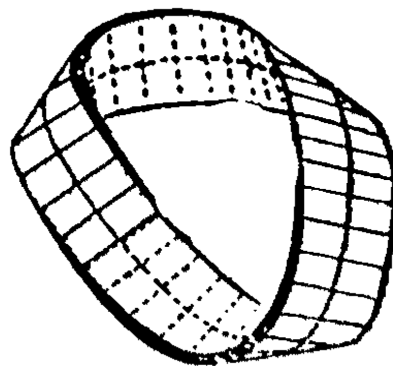
Miôbiux đã có một phát minh đáng kinh ngạc: có những mặt chỉ có một phía. Mặt đơn giản nhất loại đó là băng (hoặc lá) Miôbiux. Muốn làm lá Miôbiux phải lấy một tờ giấy hình chữ nhật dài rồi dán các đầu lại sau khi đã uốn nửa vòng như chỉ dẫn trên H.139 (a, b, c). Một con kiến bò trên mặt đó nhưng luôn ở giữa của băng sẽ quay trở về điểm xuất phát trong trạng thái lật ngửa (H. 107). Nếu ai muốn chỉ tô màu một phía của mặt Miôbiux thì tốt nhất nên nhúng cả lá Miôbiux vào thùng màu.

Một tính chất đặc biệt khác của mặt Miôbiux là nó chỉ có một mép: toàn bộ biên chỉ gồm có một đường cong kín. Một mặt hai phía thông thường thu được bằng cách dán hai đầu băng mà không uốn nó đi sẽ có hai đường biên cong khác nhau. Nếu cắt mặt này theo đường trung tâm thì nó bị phân chia thành hai mặt cùng loại. Nhưng nếu cắt băng Miôbiux theo đường trung tâm (xem H. 139) thì nó sẽ không bị chia làm hai phần. Người nào chưa từng làm việc với băng Miôbiux chắc chắn sẽ khó thấy được tình hình này vì nó mâu thuẫn với những quan niệm trực giác của chúng ta về những điều « phải » xảy ra. Nhưng, nếu ta lại cắt mặt thu được sau khi cắt băng Miôbiux theo cách mô tả ở trên (theo đường trung tâm) thì ta sẽ có hai băng không liên thông kết lại với nhau.

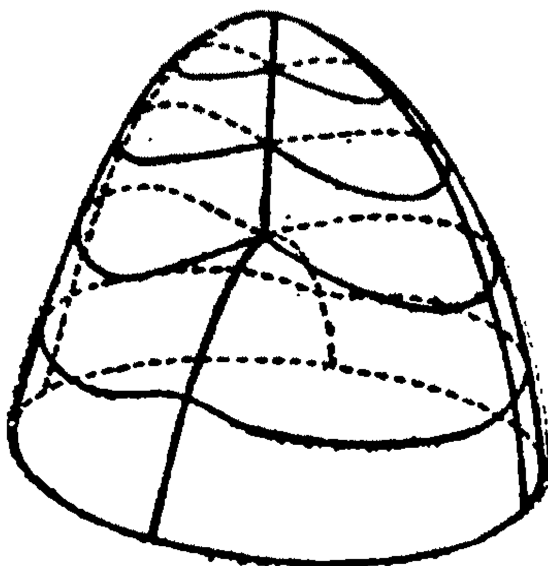
Sẽ rất thú vị nếu ta cắt những băng đó theo các đường song song với biên và cách biên một khoảng bằng 1/2, 1/3 v.v... chiều rộng của băng. Chắc hẳn, mặt Miôbiux cũng sẽ cần được nhắc đến trong giáo trình dùng cho nhà trường. Biên của mặt Miôbiux chính là một đường cong kín đơn giản « không có nút », nó có thể biến dạng thành đường tròn. Nhưng phải giả thiết trong quá trình biến dạng, mặt sẽ tự cắt nó. Mặt một phía tự cắt trong quá trình đó đã được biết với tên gọi « Kròx-kep » (H.140)[1]. Đường giao nhau ở đây phải được tính hai lần, một lần thuộc về một trong các lá cắt nhau của mặt, một lần khác thuộc về lá kia. Cũng như mọi mặt một phía khác, Krôx—Kep không thể biến dạng liên tục thành mặt hai phía (tính chất tôpô).







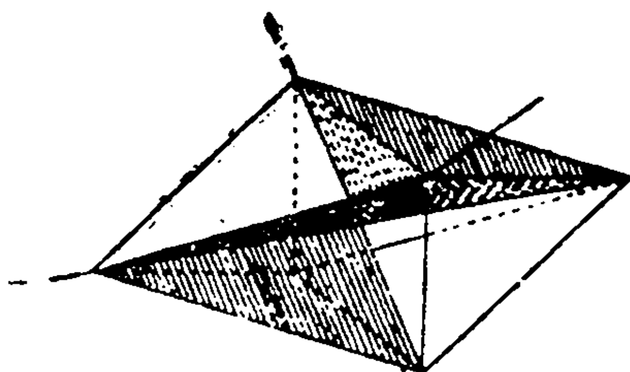
H. 139. Lá Miôbiux : a, b, c — Uốn cong và dán các băng ; d – Định hướng của các phía.



H. 140 Krôx — Kep

(1) Tiếng Anh « Cross-cap » có nghĩa là « cái mũ bắt chéo »

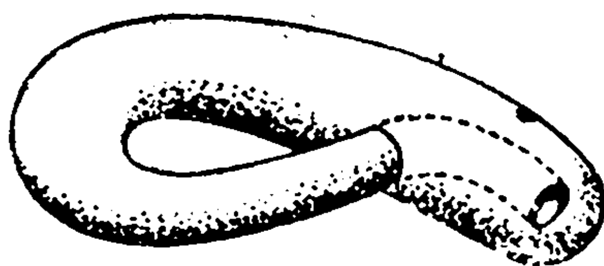
Một điều lạ lùng là có thể biến dạng băng Miôbiux sao cho biên của nó là một đường gấp khúc phẳng — tức là một tam giác — sao cho băng vẫn còn không tự cắt. Mô hình đó do *B. Tukhecman* tìm ra và được vẽ trên H. 141a; biên của băng là tam giác ABC giới hạn bởi một nửa thiết diện chéo hình vuông của khối bát diện (đối xứng qua thiết diện này). Bản thân băng gồm sáu mặt nửa bát diện và bốn tam giác vuông là các phần tư của các mặt chéo vuông góc của bát diện(2).



H. 141. Băng Miôbiux với biên thẳng và hình khai triển.

Một thí dụ thú vị khác về mặt một phía là « bình Klêin ». Đó là một mặt kín nhưng lại không chia không gian thành phần « trong » và phần « ngoài », trái hẳn với các mặt đóng kín ta đã biết. Nó tương đương tôpô với một cặp Krôx — Kep có các đường biên cong dán lại với nhau.

Có thể chứng minh mọi mặt *một phía* đóng kín loại p = 1, 2... là



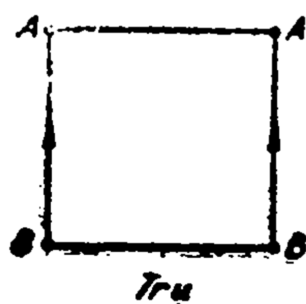
H. 142. Bình Klêin

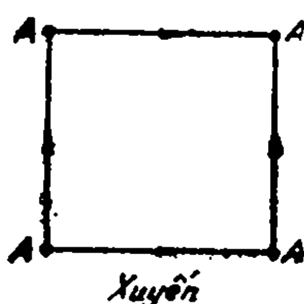
(1) Cắt các mặt ABP và BCQ ra khỏi các mặt của bát diện. Gắn bốn tam giác OAP, OBP, OCQ và OBQ vào 6 mặt còn lại. Cần cắt theo đường nối điểm O với điểm đánh dấu bởi hai chữ A và C rồi dán các đoạn tương ứng của mép hình khai triển. Mép của băng được biểu thị bởi các đoạn tô đậm nét (chu vi của tam giác ABC).

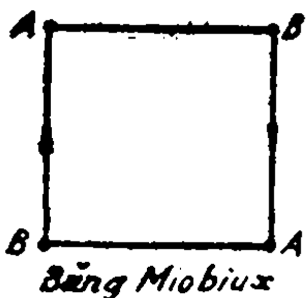
tương đương tôpô với một mặt cầu khi đã lấy đi p đĩa mà thay thế bằng các Krôx — Kep. Suy ra dễ dàng đặc trưng Ơle V — E + F của một mặt như thế có liên hệ với loại p bởi hệ thức:

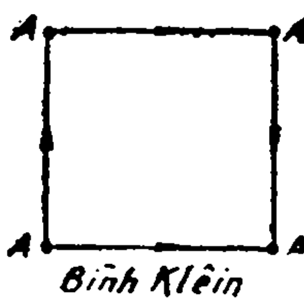
$$V - E + F = 2 - p.$$

Chứng minh mệnh đề này cũng giống như chứng minh cho mặt hai phía. Trước hết ta chứng minh rằng đặc trưng Ơle của Krôx — Kep hoặc của băng Miôbiux bằng O. Muốn vậy, ta để ý rằng nếu cắt ngang một băng Miôbiux thì ta được một hình chữ nhật có hai đỉnh thừa và một cung thừa, số miền vẫn giữ nguyên như đối với băng Miôbiux. Ta đã thấy rằng đối với hình chữ nhật thì V — E + F = 1. Do đó, đối với băng Miôbiux thì V — E + F = 0. Đề nghị bạn đọc chứng minh tỉ mỉ lại để tập luyện.





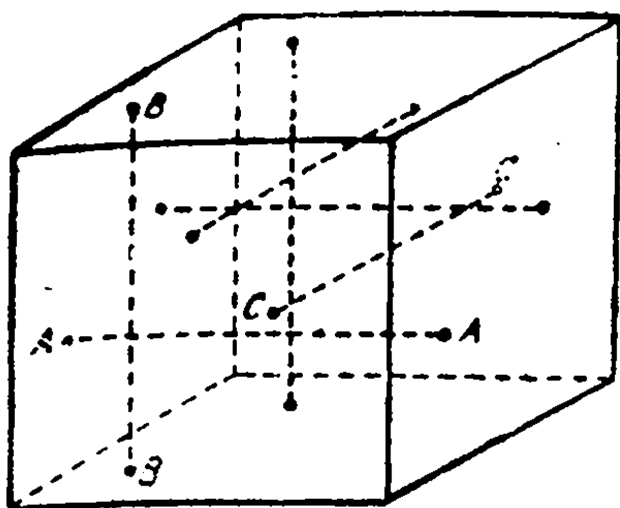




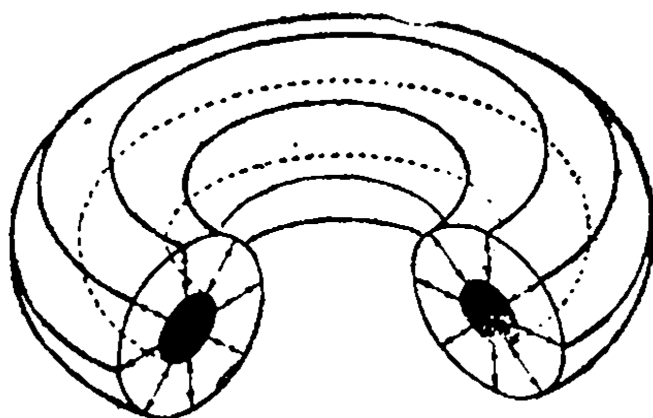
H. 143. Các mặt đóng kín xác định bằng cách đồng nhất hóa các cạnh hình vuông.

Việc nghiên cứu cấu trúc tôpô sẽ thuận lợi hơn nếu ta dùng các đa giác phẳng có các cạnh đồng nhất hóa từng đôi (xem: ứng dụng, chương IV, mục 3). Chẳng hạn trên sơ đồ của hình vẽ 143 thì các mũi tên chỉ rõ cần đồng nhất hóa những cạnh song song nào và theo hướng nào: nếu có thể được thì dùng phương pháp vật lý, nếu không thể được thì ít nhất cũng bằng suy nghĩ trừu tượng.

Có thể dùng phương pháp đồng nhất hóa để định nghĩa các đa tạp kín ba chiều tương tự như các mặt



H. 144. Định nghĩa mặt xuyến ba chiều bằng cách đồng nhất hóa các mặt hình lập phương.



H. 145. Một biểu tượng khác của mặt xuyến ba chiều (những đường cắt chỉ sự đồng nhất hóa).

kín hai chiều. Thí dụ, khi đồng nhất các điểm tương ứng của các mặt đối hình lập phương (H. 144) ta sẽ được một đa tạp kín ba chiều gọi là mặt xuyến ba chiều. Một đa tạp như thế sẽ tương đương tôpô với một miền không gian bao hàm giữa hai mặt xuyến đồng tâm (một mặt ở trong mặt kia) với sự đồng nhất hóa các điểm tương ứng (H. 145). Quả vậy, ta sẽ thu được đa tạp sau cùng này từ hình lập phương nếu ta cho trùng nhau « về mặt vật lý học » hai cặp mặt đối nhau « đã được đồng nhất bằng tưởng tượng ».

PHỤ LỤC

* **1. Bài toán năm màu.** Chứng minh bài toán mỗi bản đồ trên mặt cầu có thể tô được bằng không quá năm màu khác nhau, được dựa vào định lý Ơle (một bản đồ được coi là tô màu đúng nếu không có hai

miền nào tiếp giáp nhau theo một cung được tô màu giống nhau). Ta chỉ giới hạn ở việc xét những bản đồ trên đó tất cả các miền đều là những đa giác đơn giản đóng kín giới hạn bởi các cung tròn. Không giảm tính tổng quát, ta có thể giả thử mỗi điểm qui tụ đúng ba cung, ta sẽ gọi một bản đồ thỏa mãn điều kiện đó là một bản đồ chính qui. Ta sẽ thay thế mỗi đỉnh có qui tụ quá ba cung bằng một vòng tròn nhỏ và ghép miền trong của vòng tròn đó với một trong những miền kề: khi đó ta được một bản đồ mới, trong đó các đỉnh « bội » được thay thế bằng các đỉnh thông thường. Bản đồ mới sẽ chứa số miền bằng số miền của bản đồ cũ và sẽ là bản đồ chính qui. Nếu đã tô màu đúng thì sau đó bằng cách thu hẹp vòng tròn thành một điểm, ta sẽ được bản tô màu của bản đồ ban đầu. Bởi vậy, chỉ cần chứng minh mỗi bản đồ chính qui trên mặt cầu có thể tô bằng năm màu là đủ.

Trước hết ta chứng minh rằng mỗi bản đồ chính qui chứa ít nhất một đa giác với số cạnh nhỏ hơn sáu. Ta biểu thị Fn là số miền đa giác n cạnh của bản đồ chính qui; khi đó, nếu biểu thị F là số tất cả các miền ta có đẳng thức:

$$F = F_2 + F_3 + F_4 + \dots \qquad (1)$$

Mỗi cung có hai đầu mút, mỗi đỉnh có ba cung. Bởi vậy, nếu biểu thị E là số cung, V là số đỉnh trên bản đồ thì;

$$2E = 3V \qquad (2)$$

Hơn nữa, vì một miền giới hạn bởi n cung có n đỉnh và mỗi đỉnh thuộc vào ba miền, cho nên;

$$2E = 3V = 2F_2 + 3F_3 + 4F_4 + \dots \qquad (3)$$

Theo công thức Ơle, ta có:

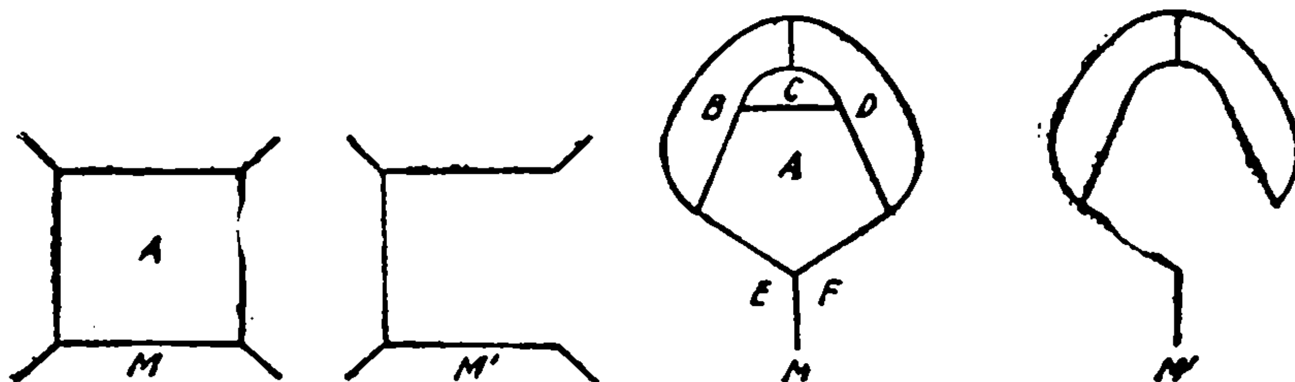
$V - E + F = 2$ hoặc $6V - 6E + 6F = 12$.

Từ hệ thức (2) suy ra $6V = 4E$; tức là $6F - 2E = 12$
Khi đó các hệ thức (1) và (3) cho ta:

$$6(F_2 + F_3 + F_4 + \ldots) - (2F_2 + 3F_3 + 4F_4 + \ldots) = 12$$

hay $(6-2)F_2 + (6-3)F_3 + (6-4)F_4 + (6-5)F_5 +$

$$+ (6-6)F_6 + (6+7)F_7 + \ldots = 12$$



H. 146-147. Để chứng minh định lý 5 màu

Bởi vì ít nhất một trong các số hạng của tổng bên trái phải dương, cho nên rõ ràng bốn số F_2, F_3, F_4 và F_5 không thể đồng thời bằng không. Đó chính là điều ta phải chứng minh.

Bây giờ ta xét đến định lý năm màu. Giả thử M là một bản đồ tùy ý nào đó trên mặt cầu, n là số tất cả các miền của nó. Ta biết rằng có ít nhất một miền có số cạnh nhỏ hơn sáu.

Trường hợp 1. M chứa miền A có 2, 3 hoặc 4 cạnh (H. 146). Trong trường hợp này ta lấy đi một cung ngăn cách A với một trong những miền kề (ở đây cần chú thích thêm như sau: nếu miền A có bốn cạnh, thì có thể xảy ra một trong các miền kề cũng là kề với A ở cạnh đối diện nếu đi xung quanh miền đó. Trong trường hợp này, dựa vào định lý Jordan thì hai miền kề với hai cạnh còn lại sẽ khác nhau, ta có thể lấy đi một trong hai cạnh này). Bản đồ M' thu được cũng là chính qui nhưng chỉ có n — 1 miền. *Nếu có thể tô M'*

bằng năm màu thì cũng có thể tô màu bản đồ M như thế. Thực vậy bốn miền lớn nhất của bản đồ M kề với A, vì thế A bao giờ cũng có màu thứ năm.

Trường hợp 2. M chứa miền A có năm cạnh. Xét năm miền kề với A và biểu thị chúng là B, C, D, E và F. Trong năm miền này bao giờ cũng tìm được hai miền không kề nhau. Thực vậy, chẳng hạn nếu B và D kề nhau thì suy ra C không kề với E, không kề với F, bởi vì nếu trái lại thì mọi đường đi từ C đến E hoặc đến F phải đi qua ít nhất một trong các miền A, B hoặc D (H. 147). Rõ ràng khẳng định này phụ thuộc rất nhiều vào định lý Jordan đúng cho mặt phẳng và mặt cầu. Trái lại, đối với mặt xuyến thì tất cả lập luận trên đều không dùng được. Có thể giả thử C và F không kề nhau. Ta lấy đi hai cạnh gián cách A với C và F, khi đó ta được bản đồ mới M' với n — 2 miền cũng là chính qui. *Nếu bản đồ mới M' tô được bằng năm màu thì cũng có thể tô màu bản đồ M như vậy.* Quả vậy, sau khi khôi phục lại các cạnh đã lấy đi thì miền A sẽ kề với năm miền được tô bằng không quá bốn màu (bởi vì C và F được tô cùng màu) và bởi thế bao giờ A cũng được tô bằng màu thứ năm.

Như vậy, trong mọi trường hợp có thể cho ứng mỗi bản đồ chính qui M có n miền với một bản đồ M' cũng chính qui có n—1 hoặc n—2 miền sao cho nếu M' tô được bằng năm màu thì M cũng vậy. Có thể lặp lại lập luận đó với bản đồ M' v.v... Kết quả cho ta được một dãy bản đồ mà số hạng đầu tiên là M : M, M', M''... có tính chất là mỗi bản đồ của dãy có thể tô bằng năm màu nếu bản đồ tiếp sau nó có thể tô được như thế. Nhưng vì số miền trong các bản đồ của dãy này giảm đi, cho nên sớm hay muộn sẽ xuất hiện trong dãy một

bản đồ có năm miền (hoặc ít hơn). Bao giờ cũng có thể tô một bản đồ như vậy bằng không quá năm màu. Chứng minh được kết thúc ở đây.

Còn phải lưu ý rằng chứng minh có tính chất « kiến thiết »: nó cho ta một phương pháp thực hiện được, dù rằng có thể khá vất vả, để sau một số hữu hạn bước tìm được màu cần thiết cho một bản đồ M có n miền.

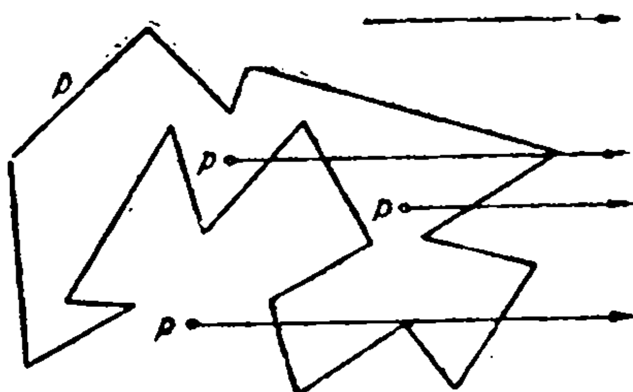
★2. Định lý Jordan cho trường hợp đa giác Định lý Jordan khẳng định mỗi đường cong kín đơn giản C chia các điểm của mặt phẳng không thuộc C thành hai miền (không có điểm chung) mà bản thân C là đường biên chung. Ở đây ta sẽ chứng minh định lý cho một trường hợp riêng khi C là một đa giác kín P. Ta sẽ chứng tỏ các điểm của mặt phẳng (ngoài những điểm ở ngay trên chu tuyến của P) được phân chia thành hai lớp A và B có các tính chất sau đây:

1) Có thể nối hai điểm thuộc cùng một lớp bằng một đường gấp khúc không có điểm chung với P.

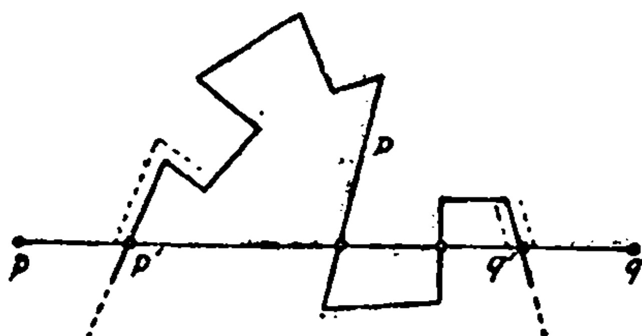
2) Nếu hai điểm thuộc về hai lớp khác nhau thì mọi đường gấp khúc nối hai điểm này đều cắt P. Một lớp tạo thành « miền trong » của đa giác, lớp kia gồm những điểm « ở ngoài » đa giác. Để chứng minh, ta chọn một hướng xác định nào đó trong mặt phẳng, không song song với một trong các cạnh của P. Vì P có một số hữu hạn cạnh nên điều đó bao giờ cũng làm được. Sau đó, ta xác định các lớp A và B như sau: Một điểm P sẽ thuộc về lớp A nếu một tia đi qua điểm đó theo hướng xác định cắt P ở một *số chẵn* các điểm (0,2, 4, 6·..) Điểm p sẽ thuộc về lớp B nếu một tia vẽ từ p theo hướng xác định sẽ cắt P ở một *số lẻ* các điểm (1, 3, 5...).

Cần bổ sung thêm nếu tia đang xét đi qua một đỉnh bất kỳ của P thì đỉnh này có được coi là giao điểm của

tia với P hay không tùy theo các cạnh xuất phát từ đỉnh đó của đa giác P ở về hai phía khác nhau hay ở cùng một phía của tia. Ta qui ước nói rằng hai điểm p và q có cùng một « tính chẵn » nếu chúng thuộc về cùng một trong hai lớp A và B. Trước hết, ta lưu ý rằng mọi điểm của đoạn thẳng không cắt P sẽ có cùng một tính chẵn. Quả vậy, tính chẵn của một điểm p di động trên một đoạn thẳng như thế sẽ biến thiên giống như khi tia tương ứng đi qua một trong các đỉnh của P nhưng, nếu lưu ý đến điều thỏa thuận của chúng ta về cách tính số giao điểm thì dễ thấy rằng tính chẵn của mỗi một trong hai trường hợp có thể xảy ra là không thay đổi. Từ đó suy ra, *nếu nối một điểm p_1 nào đó của miền A với một điểm p_2 nào đó của miền B bằng một đường gấp khúc thì đường này tất phải cắt P.* Nếu không như vậy thì tính chẵn của mọi điểm của đường gấp khúc, nói riêng của các điểm p_1 và p_2, sẽ bằng nhau. Hơn nữa, ta sẽ chứng minh rằng có thể nối hai điểm thuộc cùng một trong hai lớp A và B bằng một đường gấp khúc không cắt P. Ta biểu thị hai điểm đã cho là p và q. Nếu đoạn thẳng pq nối p và q không cắt P thì không còn phải chứng minh gì nữa. Trái lại, giả thử p' là giao điểm thứ nhất, q' là giao điểm



H. 148. Tính số giao điểm



H. 149. Dùng cho chứng minh định lý Jordan

thứ hai của đoạn thẳng pq với đa giác P (H. 149). Ta vẽ một đường gấp khúc bắt đầu từ điểm p và một đoạn thẳng theo hướng của pq và kết thúc trước điểm p'; từ đấy đường gấp khúc sẽ đi dọc theo P (không phân biệt một trong hai hướng có thể), đi như thế cho đến khi gặp lại pq một lần nữa tại lân cận điểm q'. Vấn đề là ở chỗ, nó cắt đường thẳng pq ở trên đoạn p'q' hoặc trên đoạn pq. Nếu hai điểm r và s rất gần nhau nhưng ở về hai phía khác nhau của một trong các cạnh của đa giác P thì chúng có tính chẵn khác nhau, bởi vì một trong những tia phát xuất từ các điểm đó (theo hướng xác định) sẽ có với P nhiều hơn tia kia một giao điểm. Rõ ràng tính chẵn thay đổi khi ta di động theo pq và đi qua điểm q'. Nghĩa là « đường đi » gấp khúc được ghi trên hình vẽ bởi nét đứt đoạn sẽ quay trở lại pq ở khoảng giữa p' và q, bởi vì p và q (do đó mọi điểm trên « đường đi đang xét ») sẽ có cùng một tính chẵn.

Bởi thế, định lý Jordan đã được chứng minh cho trường hợp đa giác. « Miền ngoài » của đa giác P sẽ là những điểm thuộc vào lớp A; quả vậy, nếu di chuyển khá xa theo một tia nào đó có hướng xác định thì tất nhiên, ta sẽ đi đến một điểm không có giao điểm với P và mọi điểm như vậy sẽ thuộc vao lớp A, tức là tính chẵn của chúng bằng 0. Như vậy, có thể kết luận các điểm thuộc lớp B là các điểm « trong ». Dù đa giác kín P có rắc rối đến như thế nào, ta luôn nhận ra được dễ dàng một điểm p cho trước ở trong hay ở ngoài nó. Chỉ cần vẽ từ p một tia và đếm số các giao điểm của tia đó với P. Nếu số đó là lẻ thì p nằm bên trong và không thể vượt ra ngoài nếu không cắt P. Nhưng nếu số đó là chẵn, thì điểm p ở ngoài đa giác P (đề nghị kiểm tra lại điều đó ở trên H. 148).

Sau đây là tư tưởng của một chứng minh khác của định lý Jordan cho trường hợp đa giác. Ta định nghĩa *bậc* của điểm p_0 đối với đường cong kín C (không đi qua điểm p_0) là số vòng quay[1] đầy đủ do mũi tên (vectơ) thực hiện từ p đến p_0, khi điểm p di động suốt dọc đường cong C.

Sau đó, giả thử A là tập hợp các điểm p_0 (không ở trên P) có bậc *chẵn* đối với P, còn B là tập hợp các điểm p_0 có bậc *lẻ* đối với P. Trong trường hợp này A và B theo thứ tự là miền « ngoài » và miền « trong » của P. Bạn đọc có thể thực hiện tỉ mỉ chứng minh này để luyện tập.

* 3. *Định lý đại số cơ bản.* Định lý cơ bản khẳng định rằng nếu hàm số f(z) có dạng

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (1)$$

trong đó $n \geqslant 1$ và $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ là những số phức tùy ý, thì tồn tại một số phức α sao cho $f(\alpha) = 0$. Nói cách khác, *trong trường số phức thì mọi phương trình đại số đều có nghiệm* (dựa vào định lý này, ta đã đi đến kết luận xa hơn: một đa thức f(z) có thể phân tích được thành n thừa số tuyến tính:

$$f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_n),$$

trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các điểm không của f(z). Đặc biệt, có thể chứng minh định lý này cũng như định lý Braue về điểm bất động bằng những kiến thức tôpô. Bạn đọc nhớ lại rằng số phức là một ký hiệu dạng $x + yi$ trong đó x và y là các số thực, còn ký hiệu i có tính chất $i^2 = -1$. Số phức $x + yi$ được biểu diễn bởi một điểm (x,y) trong mặt phẳng tọa độ vuông góc. Nếu

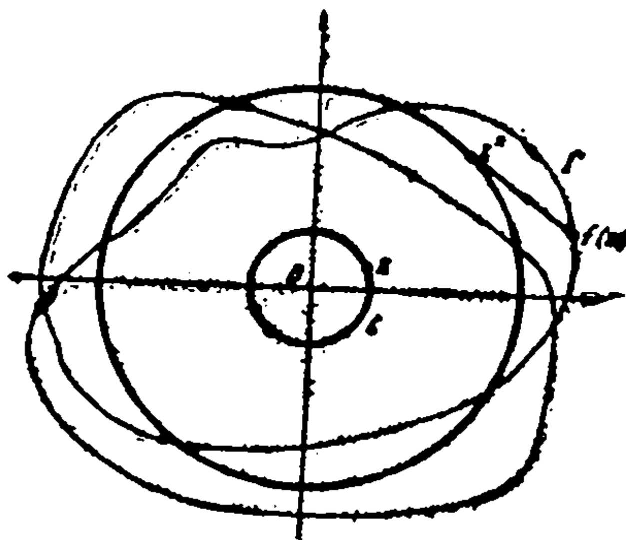
(1) Tất nhiên, cần lấy số này theo ý nghĩa đại số tức là có tính đến hướng của phép quay.

ta đưa tọa độ cực vào mặt phẳng này, lấy gốc tọa độ làm cực, hướng dương của trục x là trục cực, thì ta có thể viết:

$$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

trong đó $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Từ công thức Moavrơ suy ra ngay $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$. Từ đó, rõ ràng là nếu một số phức z vạch nên một đường tròn bán kính r có tâm ở gốc tọa độ, thì z^n sẽ vạch đúng n lần đường tròn bán kính r^n. Ta còn nhớ môđun của z (biểu thị bởi $|z|$) chính là khoảng cách từ z đến 0 và nếu $z' = x' + y'i$ thì $|z - z'|$ là khoảng cách giữa z và z'. Sau đây ta bắt đầu chứng minh định lý.

Giả thử đa thức (1) không có nghiệm, tức là với một số phức z bất kỳ thì $f(z) \neq 0$. Nếu z vạch nên một đường cong kín nào đó trong mặt phẳng x, y thì f (z) vạch nên một đường cong kín G không đi qua gốc tọa độ (H. 150). Có thể định nghĩa bậc của điểm 0 đối với hàm số f (z) theo đường cong kín C là số vòng quay đầy đủ mà một vectơ đi từ O đến một điểm f (z) trên đường cong G đã thực hiện khi z di chuyển theo suốt đường cong C. Ta chọn đường cong C là đường tròn tâm O bán kính t và biểu thị φ (t) là bậc của điểm O đối với hàm số f (z) theo đường tròn tâm O bán kính t Tất nhiên, φ (0) = 0 bởi vì đường tròn bán kính O thu về một điểm và đường cong G cũng thu về



H. 150. Chứng minh định lý đại số cơ bản

một điểm $f(0) \neq 0$. Nếu ta chứng minh với t đủ lớn hàm số $\varphi(t)$ bằng n thì trong đó đã có chứa mâu thuẫn bởi vì, một mặt thì bậc $\varphi(t)$ phải là một hàm số liên tục của t (vì f (z) là hàm số liên tục của z); mặt khác, hàm $\varphi(t)$ chỉ có thể lấy giá trị nguyên vì thế không thể chuyển từ giá trị O đến giá trị n một cách liên tục. Ta còn phải chứng minh với giá trị t đủ lớn thì $\varphi(t) = n$.

Muốn vậy, ta lưu ý rằng nếu bán kính đường tròn t thỏa mãn các bất đẳng thức

$$t > 1 \text{ và } t > |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|,$$

thì

$$|f(z) - z^n| = |a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_0| \leqslant$$

$$\leqslant |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + |a_{n-2}| \cdot |z|^{n-2} + \dots + |a_0| =$$

$$= t^{n-1}\left[|a_{n-1}| + \frac{|a_{n-2}|}{t} + \dots + \frac{|a_0|}{t^{n-1}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant t^{n-1}[|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_0|] < t^n = |z^n|.$$

Biểu thức vế trái chính là khoảng cách giữa các điểm z^n và f (z), biểu thức vế phải của bất đẳng thức chính là khoảng cách từ điểm z_n đến gốc tọa độ. Từ đó, ta thấy rằng đoạn thẳng nối các điểm z^n và f (z) sẽ không đi qua gốc tọa độ nếu điểm z nằm trên đường tròn bán kính t có tâm ở gốc tọa độ. Trong trường hợp này, có thể *biến dạng* đường cong vạch nên bởi điểm f (t) thành đường cong vạch nên bởi điểm z^n không đi qua gốc, bằng cách dời hình liên tục mỗi điểm f (z) tới điểm tương ứng z^n theo một đoạn thẳng. Trong đó, bậc của gốc chỉ có thể nhận các giá trị nguyên. Đồng thời, trong biến dạng nó phải biến thiên liên tục, nghĩa là đối với cả hai hàm f (z) và z^n thì nó như nhau. Vì đối với z^n nó bằng n cho nên đối với f (z) nó cũng có giá trị đó. Chứng minh kết thúc.

CHƯƠNG VI

HÀM VÀ GIỚI HẠN

MỞ ĐẦU

Các phần quan trọng nhất của toán học hiện đại tập trung quanhkhái niệm hàm và giới hạn. Trong chương này chúng ta sẽ thử phân tích có hệ thống những khái niệm đó.

Những biểu thức như $x^2 + 2x - 3$ sẽ không có giá trị bằng số xác định nếu không chỉ ra giá trị bằng số của x. Người ta nói rằng giá trị của một biểu thức như vậy là *hàm* của giá trị x và viết:

$$x^2 + 2x - 3 = f(x)$$

Chẳng hạn, nếu $x = 2$ thì $2^2 + 2 . 2 - 3 = 5$, hay $f(2) = 5$. Cũng bằng cách thay thế trực tiếp như vậy, có thể tìm được giá trị của hàm f(x) với các giá trị nguyên, phân, vô tỉ và thậm chí với cả giá trị phức của x.

Số các số nguyên tố nhỏ hơn n là hàm $\pi(n)$ của số nguyên n. Khi cho trước giá trị của số n thì giá trị của hàm $\pi(n)$ được xác định, dù rằng ta chưa biết một biểu thức đại số nào để tính nó. Diện tích tam giác là hàm của các độ dài ba cạnh của tam giác, nó thay đổi theo các cạnh và xác định nếu độ dài các cạnh xác định. Nếu mặt phẳng chịu một biến đổi xạ ảnh hoặc tôpô, thì các tọa độ của điểm sau phép biến đổi phụ thuộc vào các tọa độ ban đầu của điểm; chúng là các hàm của những tọa độ ban đầu. Khái niệm « hàm » xuất hiện mỗi khi các đại lượng được liên kết với nhau bởi một hệ thức vật lý xác định bất kỳ. Thể tích

khí trong xy lanh là hàm của nhiệt độ và áp suất tác dụng lên pittông. Áp suất của khí quyển lên quả cầu không khí là hàm của độ cao quả cầu so với mực nước biển. Một loạt các hiện tượng có chu kỳ — chuyển động của thủy triều, dao động của sợi dây đàn căng, sự truyền các sóng ánh sáng phát ra từ một sợi dây nung nóng — được « chi phối » bởi các hàm lượng giác *sinx* và *cosx* đơn giản.

Đối với bản thân Leâybnitx (1646 — 1716) là người đầu tiên đưa ra thuật ngữ « hàm » và đối với các nhà toán học thế kỷ XVIII thì tư tưởng tương quan hàm được đồng nhất hóa ở mức độ nhất định với sự tồn tại một công thức toán học đơn giản biểu thị chính xác tương quan đó. Quan niệm như thế là quá hẹp so với những yêu cầu do vật lý — toán đề ra. Khái niệm « hàm » cùng với khái niệm « giới hạn » vì thế đã phải chịu đựng những sự mở rộng và trau chuốt kéo dài.

Trong chương này, ta sẽ phác lại ngắn gọn quá trình đó.

§ 1. BIẾN ĐỘC LẬP VÀ HÀM

1. Các định nghĩa và thí dụ, Không ít khi ta phải làm việc với các đối tượng toán học mà ta sẽ chọn một cách tự do theo cách của mình từ một tập hợp S nào đó. Trong những trường hợp như vậy thì đối tượng được chọn có tên là *biến* còn tập hợp S có tên là *miền biến thiên của biến đó*. Các biến được biểu thị bằng các chữ cuối của vần chữ cái. Chẳng hạn, nếu biểu thị tập hợp tất cả số nguyên là S thì biến X trong miền S biểu thị cho một số nguyên nào đó. Ta nói « biến X chạy qua tập hợp S » với ý nghĩa là, ta có thể đồng nhất biến X với một phần tử bất kỳ của tập hợp S.

Khái niệm biến được áp dụng tiện lợi nếu ta muốn phát biểu một khẳng định đối với các phần tử có thể chọn tùy ý trong tập hợp số nguyên. Chẳng hạn, nếu S biểu thị tập hợp số nguyên, còn X và Y biểu thị các biến trong miền S thì công thức:

$$X + Y = Y + X$$

là một biểu thức ký hiệu tiện lợi biểu thị cho sự kiện tổng hai số nguyên tùy ý không phụ thuộc vào thứ tự các số hạng. Một trường hợp riêng được biểu thị bởi đẳng thức: $2 + 3 = 3 + 2$ có chứa các số không đổi. Nhưng, nếu muốn biểu thị một qui luật tổng quát đúng cho mọi cặp số thì phải sử dụng các ký hiệu có ý nghĩa của các biến. Không nhất thiết miền S của biến X phải là một tập hợp số. Chẳng hạn, S có thể là tập hợp tất cả hình tròn trên mặt phẳng: lúc này biến X biểu thị một hình tròn cá thể bất kỳ. Hoặc S có thể là tập hợp tất cả các đa giác kín trên mặt phẳng và bây giờ, X là một da giác cá thể tùy ý. Cũng không cần miền biến phải chứa vô số phần tử. Thí dụ, X có thể biểu thị một người riêng biệt trong nhân dân S của một thành phố cho trước tại một thời điểm nhất định. Hoặc X cũng có thể biểu thị một số dư tùy ý trong những số dư có thể có trong phép chia một số nguyên cho 5, trong trường hợp này miền S chỉ gồm năm số: 0, 1, 2, 3, 4.

Biến bằng số là trường hợp quan trọng nhất. Trong trường hợp này ta thường dùng chữ x — đó là trường hợp mà miền biến S là một đoạn (khoảng) nào đó $a \leqslant x \leqslant b$ của trục số thực X. Ở đây ta nói x là *biến liên tục* (*thực*) trong đoạn đang xét. Miền biến thiên của biến liên tục có thể trải rộng đến vô hạn. Chẳng hạn S có thể là tập hợp tất cả số thực $x > 0$ hoặc thậm chí là tập hợp tất cả số thực không loại trừ số nào. Tương tự, ta có thể khảo sát một biến X mà giá trị

của nó là các điểm của một mặt phẳng hoặc của một miền nào đó của mặt phẳng như miền trong của một hình chữ nhật hoặc hình tròn chẳng hạn. Vì mỗi điểm của mặt phẳng được xác định bởi hai tọa độ (x, y) lấy trên hai trục xác định nào đó, cho nên trong trường hợp này ta thường nói đến *một cặp biến số thực (liên tục) x và y.*

Có thể xảy ra trường hợp, ứng với mỗi giá trị của biến X có một giá trị xác định của một biến khác U. Lúc đó U được gọi là *hàm* của biến X. Phương pháp nhờ đó U liên hệ với X được biểu thị bởi ký hiệu U = = F(X) (đọc là: U bằng F của X). Nếu X chạy trên tập hợp S thì biến U sẽ chạy trên một tập hợp khác gọi là T chẳng hạn. Thí dụ, nếu S là tập hợp các tam giác X trên mặt phẳng, thì có thể hiểu hàm U = F(X) là chu vi của một tam giác X đang xét, do đó T sẽ là tập hợp tất cả các số dương. Ta nhấn mạnh rằng hai tam giác khác nhau X_1 và X_2 có thể có chu vi bằng nhau, tức là $F(X_1) = F(X_2)$ có thể xảy ra khi $X_1 \neq X_2$. Phép biến đổi xạ ảnh một mặt phẳng S thành một mặt phẳng khác T nào đó sẽ cho ứng với mỗi điểm X của mặt phẳng S một điểm duy nhất U của mặt phẳng T theo một qui tắc xác định. Ta có thể biểu thị nó bởi ký hiệu hàm U = F(X). Trái ngược với thí dụ trước, ở thí dụ này ta luôn có $F)X_1) \neq F(X_2)$ nếu $X_1 \neq X_2$. Ta nói rằng ánh xạ của mặt phẳng S lên mặt phẳng T là đơn trị hai chiều hoặc một — một.

Một hàm có biến liên tục thường được xác định bởi một biểu thức đại số. Có thể dùng các hàm sau đây làm thí dụ: $u = x^2$; $u = \frac{1}{x}$; $u = \frac{1}{1+x^2}$.

Trong các biểu thức đầu và cuối thì x có thể chạy trên tập hợp tất cả các số thực, còn trong biểu thức

thứ hai thì x có thể chạy trên tập hợp tất cả số thực trừ số 0 (giá trị 0 bị loại vì ký hiệu 1/0 không phải là một số).

Số B (n) các thừa số nguyên tố của số n là một hàm số của n, trong đó n chạy trên tập hợp các số tự nhiên. Nói chung, một dãy số bất kỳ $a_1, a_2, a_3...$ có thể xem như tập hợp các giá trị của hàm U = E (n) nào đó mà miền biến thiên của biến độc lập là tập hợp số tự nhiên. Để viết cho gọn ta sẽ biểu thị số hạng thứ n của dãy bằng ký hiệu a_n thay cho việc dùng ký hiệu hàm tường minh E (n). Các biểu thức đã nói đến trong chương I:

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

là những hàm của biến số nguyên n.

Giả thử cho trước hệ thức U = E (X); biến X được gọi là *biến độc lập*, biến U được gọi là *biến phụ thuộc* vì giá trị của nó phụ thuộc vào việc lựa chọn giá trị của X. Có thể xảy ra trường hợp chỉ có một giá trị của biến U tương ứng với mọi giá trị của biến X, tức là tập hợp T gồm có một phần tử duy nhất. Lúc này ta gặp một trường hợp đặc biệt, biến U thực chất không thay đổi, U không đổi (hằng số). Ta sẽ đưa trường hợp này vào khái niệm hàm tổng quát tuy rằng có thể là lạ lùng đối với người bắt đầu học bởi vì cái cơ bản trong tư tưởng hàm là sự biến thiên của biến U (khi thay đổi biến X). Nhưng không sao, vì thực tế là rất có ích nếu ta coi hằng là một trường hợp đặc biệt của biến mà « miền biến thiên » của nó có một phần tử duy nhất.

Khái niệm tương quan hàm có một ý nghĩa đặc biệt không những trong bản thân toán học «thuần túy» mà cả trong những ứng dụng thực tế của nó. Các định luật vật lý không có gì khác chính là sự biểu thị của phương pháp mà qua đó những đại lượng này phụ thuộc vào những đại lượng khác, có khả năng biến đổi như thế này hoặc như thế khác. Chẳng hạn, độ cao của âm thanh sinh ra bởi dao động của dây đàn phụ thuộc vào độ dài, vào trọng lượng và vào độ căng của dây; áp suất của khí quyển phụ thuộc vào độ cao; năng lượng của viên đạn phụ thuộc vào khối lượng và vận tốc của nó. Nhiệm vụ của vật lý là xác định chính xác hoặc gần đúng bản chất của các tương quan tương tự như vậy.

Nhờ khái niệm hàm ta có thể nêu đặc trưng chính xác về mặt toán học của chuyển động. Nếu hình dung một phần tử chuyển động được tập trung vào một điểm nào đó trong không gian có tọa độ vuông góc x, y,z, còn biến t là thời gian thì chuyển động của phần tử đó sẽ hoàn toàn được xác định bởi việc cho các tọa độ x,y,z là hàm số của thời gian: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$.

Có thể lấy sự rơi tự do của một phần tử theo phương thẳng đứng dưới tác dụng của trọng lực làm thí dụ. Trong trường hợp này ta có: $x = 0$, $y = 0$, $z = -1/2gt^2$, trong đó g là gia tốc trọng trường. Nếu phần tử quay đều theo đường tròn đơn vị trong mặt phẳng (x,y) thì thì chuyển động của vật được đặc trưng bởi hàm:

$$x = \cos\omega t, \qquad y = \sin\omega t.$$

trong đó ω là số không đổi (được gọi là vận tốc góc của phép quay). Cần phải hiểu một hàm toán học là một qui luật chi phối sự phụ thuộc lẫn nhau giữa các biến, không hơn không kém. Không nên hiểu khái niệm hàm là sự tồn tại một cái gì gần với «nhân quả»

trong các quan hệ giữa biến độc lập và biến phụ thuộc. Dù rằng trong ngôn ngữ sinh hoạt thì thuật ngữ « tương quan hàm » gắn chặt với ý nghĩa sau cùng này nhưng chúng ta sẽ tránh kiều thể hiện có tính chất triết học đó. Chẳng hạn, định luật Bôilơ, nói về chất khí trong bình kín ở một nhiệt độ không đổi, khẳng định tích của áp suất chất khí p với thể tích v của nó là một đại lượng không đổi bằng c (giá trị này phụ thuộc vào nhiệt độ) : $pv = c$.

Hệ thức này có thể giải ra đối với p, cũng như đối với v:

$$p = \frac{c}{v} \quad \text{hoặc} \quad v = \frac{c}{p};$$

ở đây, không nên coi sự biến đổi thể tích là « nguyên nhân » của sự thay đổi về áp suất; cũng như không nên coi sự thay đổi áp suất là « nguyên nhân » của sự thay đổi thể tích. Đối với nhà toán học, cái quan trọng chỉ là hình thức của sự tương ứng (liên hệ) giữa hai đại lượng biến thiên mà ông ta khảo sát.

Nên lưu ý có sự khác nhau về cách xử lý khái niệm hàm giữa các nhà toán học và các nhà vật lý học. Các nhà toán học thường nhấn mạnh *qui luật của sự tương ứng*, đến phép toán cần áp dụng vào giá trị của biến độc lập x để tìm được giá trị của biến phụ thuộc u. Với ý nghĩa đó thì f(x) là ký hiệu của *một phép toán*, giá trị $u = f(x)$ là kết quả của việc áp dụng phép toán f vào số x. Nhà vật lý học thường chú ý đến *bản thân đại lượng* u hơn là chú ý đến qui trình toán học nhờ đó có thể tìm được giá trị của u từ giá trị x. Chẳng hạn lực cản u của không khí vào vật chuyển động phụ thuộc vào vận tốc v của chuyển động, có thể tìm được nó bằng thực nghiệm không phụ thuộc vào việc biết hay không một công thức toán học để tính u. Vật lý quan tâm trước hết đến lực cản có thực chứ không phải là một công thức toán học f(x) nếu như công thức này không giúp ích gì cho việc phân tích dáng điệu của đại lượng u. Cách xem xét như vậy thường có ở những người áp dụng

toán học vào vật lý hoặc ở những nhà kỹ thuật. Trong một số phần của giải tích toán học, đôi khi để tránh nhầm lẫn, người ta phân biệt rất rõ khi nào ký hiệu $u = f(x)$ biểu thị phép toán f áp dụng vào x để tìm u hoặc biểu thị bản thân đại lượng u mà đại lượng này về phần nó có thể xem như phụ thuộc (một cách hoàn toàn khác) vào một biến khác z. Thí dụ, diện tích hình tròn được cho bởi hàm $u=f(x)=\pi x^2$ trong đó x là bán kính; nhưng cũng có thể viết $u=g(z) = \frac{z^2}{4\pi}$ với z là chu vi đường tròn.

Một đa thức có dạng:

$$u = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

với « hệ số » $a_0, a_1 \ldots, a_n$ là các hằng số, là một loại hàm một biến đơn giản nhất. Sau đó là các *hàm hữu tỉ* chẳng hạn:

$$u = \frac{1}{x}; \ u = \frac{1^1}{1+x^2}; \ u = \frac{2x+1}{x^4+3x^2+5};$$

là tỉ số của các đa thức, rồi đến các *hàm lượng giác* cosx, sinx, tgx = sinx/cosx được xác định tốt nhất bằng đường tròn đơn vị trong mặt phẳng (ξ, η) với $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Nếu một điểm P (ξ, η) chuyển động theo đường tròn đó và nếu x là một góc có hướng phải quay nửa trục dương x để nó trùng với bán kính OP thì cosx và sinx là các tọa độ của điểm P: $\cos x = \xi$, $\sin x = \eta$.

2. Số đo radian của góc. Trong mọi áp dụng thực tế thì góc được đo bằng những đơn vị thu được khi chia góc vuông ra một số phần bằng nhau. Nếu số phần này là 90 thì đơn vị đo gọi là « độ » thông thường. Phép chia góc ra 100 phần gần với hệ thập phân của ta, nhưng nguyên tắc đo vẫn như trước. Trong các áp dụng lý thuyết ta thường dùng một phương pháp khác hẳn để xác định đại lượng góc thuận tiện hơn, gọi là phép đo bằng radian. Trong hệ đo này, nhiều công

thức quan trọng chứa các hàm số lượng giác của góc sẽ có dạng đơn giản hơn so với hệ đo bằng độ. Muốn tìm số đo rađian của một góc, ta vẽ hình tròn có tâm ở đỉnh, có bán kính bằng 1. Độ dài cung s của phần đường tròn nằm giữa các cạnh của góc được gọi là *số đo rađian* của góc. Vì độ dài toàn bộ đường tròn bán kính 1 bằng 2π, cho nên góc « đầy » 360^0 có số đo 2π rađian. Do đó, nếu biểu thị x là số đo rađian của góc, y là số đo bằng độ của nó thì x và y liên hệ với nhau bằng hệ thức $\frac{y}{360} = \frac{x}{2\pi}$ hay $\pi y = 180x$. Chẳng hạn, góc 90^0 $(y = 90)$ có số đo rađian $x = \frac{90\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$. Mặt khác góc 1 rađian (góc có số đo rađian là $x = 1$) là một góc ở tâm chắn cung có độ dài bằng bán kính đường tròn; số đo độ của góc đó là $y = \frac{180}{\pi} = 57,2957...$ độ. Muốn đổi từ số đo rađian x sang số đo độ y, phải nhân x với số $\frac{180}{\pi}$. Số đo rađian x của một góc nào đó cũng bằng hai lần diện tích A của hình quạt do hình đó tạo ra từ hình tròn đơn vị. Thực vậy, diện tích đó so với diện tích cả hình tròn như độ dài cung so với độ dài cả đường tròn: $\frac{x}{2\pi} = \frac{A}{\pi}$; vậy thì $x=2A$.

Bây giờ ta coi góc x là góc có số đo rađian là x. Để cho rõ ràng ta sẽ biểu thị góc có số đo độ bằng x là x^0. Sau này, ta sẽ thấy rõ thuận lợi của việc dùng số đo rađian trong các phép toán giải tích khác nhau. Song, cần phải thừa nhận trong ứng dụng thực tiễn thì nó không tiện lợi. Thực thế, vì π là số vô tỉ cho nên ta không thể đặt bao nhiêu lần góc đơn vị (tức là góc có

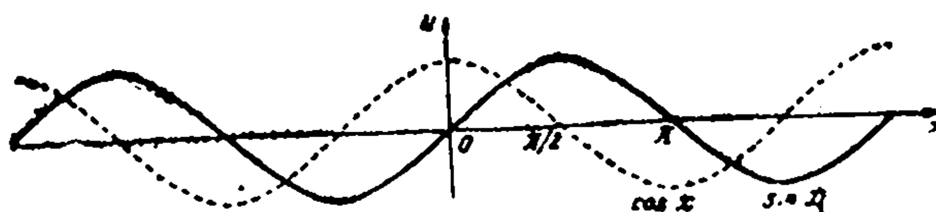
số đo radian bằng 1) trên hình tròn đơn vị để nó quay trở về vị trí ban đầu. Đối với phép đo thông thường thì cứ đặt 360 lần một độ hoặc 4 lần chín mươi độ, ta quay trở về vị trí xuất phát.

3. Đồ thị của hàm — Hàm ngược. Thường thường, đặc trưng của một hàm được thể hiện rất rõ qua một đồ thị đơn giản. Nếu (x, u) là các tọa độ trên mặt phẳng có hai trục vuông góc thì hàm tuyến tính $u = ax + b$ sẽ được biểu thị bởi những đường thẳng; các hàm bậc hai $u = ax^2 + bx + c$ được biểu thị bởi các parabôl; các hàm $u = 1/x$ được biểu thị bởi các hypebol v.v... Theo định nghĩa thì *đồ thị* của một hàm $u = f(x)$ nào đó bao gồm tất cả các điểm của mặt phẳng mà các tọa độ (x, u) của chúng liên hệ với nhau bởi phương trình $u = f(x)$. Các hàm sinx, cosx, tgx được biểu thị bởi các đồ thị trên H. 151 và H. 152. Những đồ thị này phản ánh một cách trực quan hàm tăng hoặc giảm khi x biến thiên.

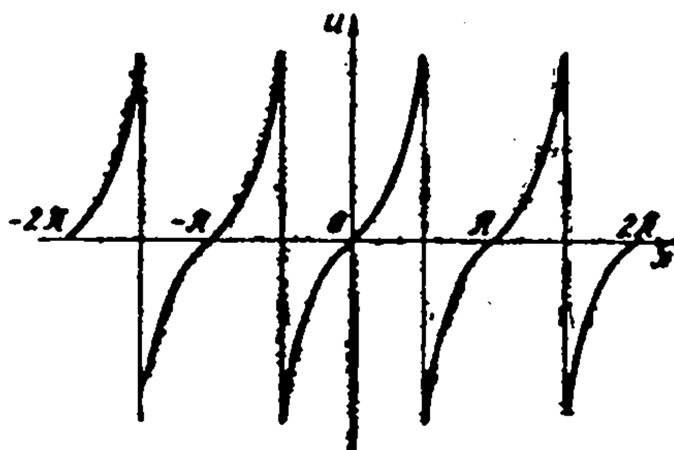
Một trong những phương pháp quan trọng để đưa vào các hàm mới là như sau. Xuất phát từ một hàm F(X) đã biết nào đó, có thể giải phương trình $U = F(X)$ đối với X sao cho X được biểu thị như một hàm của $U : X = G(U)$. Khi đó hàm G(U) được gọi là *hàm ngược* của hàm F(X). Quá trình này chỉ dẫn đến kết quả đơn trị trong trường hợp hàm $U = F(X)$ xác định ánh xạ một — một từ miền biến X lên miền biến U, tức là nếu bất đẳng thức $X_1 \neq X_2$ bao giờ cũng kéo theo bất đẳng thức $F(X_1) \neq F(X_2)$. Chỉ với điều kiện này thì mỗi giá trị của U mới tương ứng với một giá trị duy nhất của X. Ta nhớ lại một thí dụ đã nêu trước đây, trong đó biến độc lập X là một tam giác bất kỳ của mặt phẳng còn hàm $U = F(X)$ là chu vi của nó. Tất nhiên, một ánh xạ như vậy của tập hợp S các tam giác lên tập hợp T các số dương là không một — một, bởi vì có vô số

tam giác khác nhau có cùng một chu vi. Trong trường hợp này, hệ thức $U = F(X)$ không thể dùng để xác định đơn trị một hàm ngược. Mặt khác, hàm $m = 2n$ trong đó n chạy trên tập hợp S tất cả các số nguyên, còn m chạy trên tập hợp T các số chẵn sẽ cho tương ứng một — một giữa hai tập hợp và hàm ngược $n = m/2$ sẽ được xác định. Để có một thí dụ khác về ánh xạ đơn trị ta xét hàm $u = x^3$. Khi x chạy trên tập hợp tất cả số thực, u cũng chạy trên tập hợp tất cả số thực và chỉ nhận mỗi giá trị một lần. Hàm số ngược được xác định đơn trị trong trường hợp này có dạng $x = \sqrt[3]{u}$. Với hàm $u = x^2$ thì hàm ngược sẽ không xác định đơn trị. Quả vậy, do $u = x^2 = (-x)^2$ cho nên mỗi giá trị dương u sẽ tương ứng với hai giá trị khác nhau (tạo ảnh) của x. Nếu hiểu ký hiệu $\sqrt{u}$ (như ta thường quan niệm) là số *dương* mà bình phương của nó là x^2 thì hàm ngược $x = \sqrt{u}$ là tồn tại nếu như ta qui ước chỉ xét các giá trị dương của x và u.

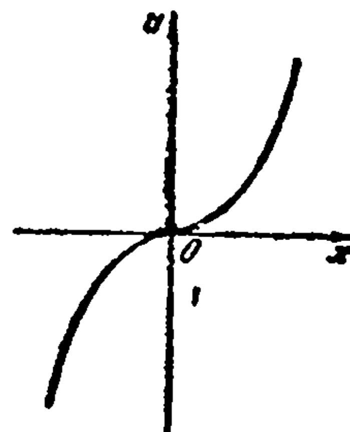
Sự tồn tại hàm ngược có thể xác nhận được khi ta nhìn vào đồ thị của hàm đã cho. Hàm ngược tồn tại và đơn trị khi mỗi giá trị của u chỉ tương ứng với một giá trị của x. Về mặt hình học thì điều đó nghĩa là không có đường thẳng nào song song với x cắt đồ thị tại quá một điểm. Điều này sẽ xảy ra khi hàm $u = f(x)$ đơn điệu, tức là hoặc luôn luôn tăng hoặc luôn luôn giảm (khi x tăng). Chẳng hạn nếu hàm $u = f(x)$ là tăng hầu khắp nơi thì khi $x_1 < x_2$ ta luôn có $u_1 = f(x_1) < u_2 = f(x_2)$. Do đó, ứng với một giá trị u cho trước không có quá một giá trị x để cho $u = f(x)$ và hàm ngược sẽ được xác định đơn trị. Đồ thị hàm ngược $x = g(u)$ thu được từ đồ thị đã cho bằng một phép quay 180^0 xung quanh đường thẳng chấm chấm (H. 151) sao cho vai trò của trục x và trục y đổi chỗ cho nhau.



H. 151. Đồ thị hàm số xinx và cosx



H. 152. $u = tgx$



H. 153. $u = x^3$

Vị trí mới của đồ thị sẽ biểu diễn x là hàm của u. Ở vị trí ban đầu, đồ thị chỉ giá trị u là độ cao so với trục hoành x, sau khi quay đồ thị mới thu được chỉ giá trị x là độ cao so với trục hoành u.

Có thể minh họa những lập luận của mục này qua thí dụ của hàm:

$$u = tgx.$$

Hàm này *đơn điệu* trong khoảng $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (H. 152): các giá trị u luôn luôn tăng đồng thời với x, nó biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$, do đó, rõ ràng hàm ngược $x = g(u)$ được xác định với mọi u. Hàm đó được biểu thị là arctgu. Như vậy $\text{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$ vì $tg\frac{\pi}{4} = 1$. Đồ thị $y = \text{arctg}u$ được vẽ trên H. 155.

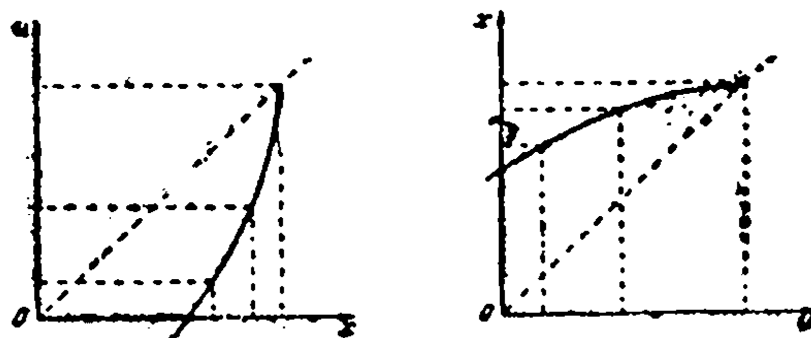
4. Các hàm hợp Một phương pháp quan trọng thứ hai để tạo các hàm mới từ hai hay nhiều hàm cho trước *là sự tạo thành các hàm hợp («sự hợp thành»)*. Chẳng hạn, hàm

$$u = f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

được « hợp thành » từ hai hàm đơn $z = g(x) = 1 + x^2$ và $u = h(z) = \sqrt{z}$ và có thể viết như sau:

$$u = f(x) = h[g(x)]$$

Tương tự, hàm $u = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ được hợp thành từ ba hàm:



H. 154. Các hàm ngược nhau

$z = g(x) = 1 - x^2$, $\omega = h(z) = \sqrt{z}$ và $u = k(\omega) = \dfrac{1}{\omega}$, tức là có thể viết $u = f(x) = k[h[g(x)]]$.

Hàm $u = f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ được hợp thành từ hai hàm

$$z = g(x) = \frac{1}{x} \text{ và } u = h(z) = \sin z.$$

Hàm $f(x) = \sin 1/x$ không xác định khi $x = 0$ bởi vì khi $x = 0$ thì biểu thức $1/x$ không có nghĩa. Đồ thị của hàm đặc biệt này có một mối liên hệ nào đó với đồ thị hình sin. Ta biết $\sin z = 0$ khi $z = k\pi$, trong đó k là số nguyên bất kỳ.

Ngoài ra

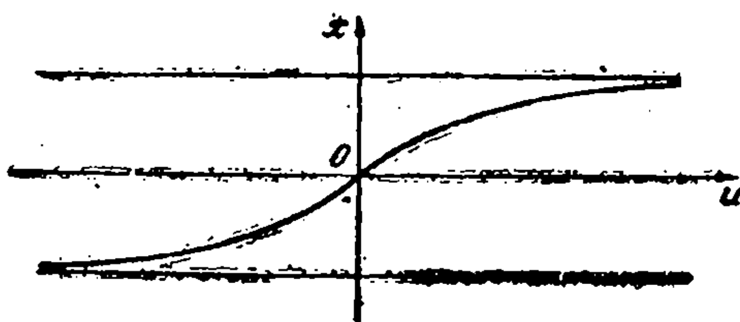
$$\sin z = \begin{cases} 1 \text{ khi } z = (4k+1)\dfrac{\pi}{2}, \\ -1 \text{ khi } z = (4k-1)\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

trong đó k là số nguyên tùy ý. Do đó ta có:

$$\sin\frac{1}{x} = \begin{cases} 0 \text{ khi } x = \dfrac{1}{k\pi}, \\ 1 \text{ khi } x = \dfrac{2}{(4k+1)\pi}, \\ -1 \text{ khi } x = \dfrac{2}{(4k-1)\pi}. \end{cases}$$

Nếu ta đặt liên tiếp k = 1, 2, 3, 4... thì mẫu số của các phân số đó sẽ tăng vô hạn, do đó mà các giá trị x tại đó hàm sin 1/x có giá trị 1, − 1, 0 sẽ càng ngày càng dồn vào lân cận điểm x = 0. Giữa mỗi điểm như vậy và gốc sẽ luôn luôn có một số lượng vô hạn các dao động. Đồ thị của hàm số này được vẽ trên H.156.

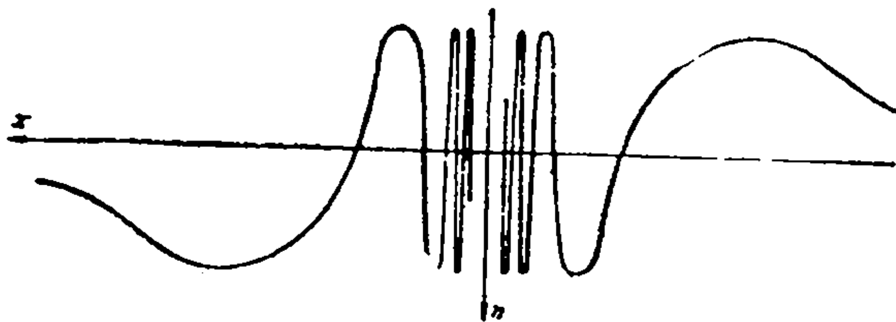
5. Tính liên tục Đồ thị các hàm đã xét cho ta một biểu tượng trực quan về một tính chất gọi là tính liên tục. Chúng ta sẽ cho định nghĩa chính xác khái niệm đó ở §4 sau khi đã đặt cơ sở logic chặt chẽ cho khái niệm giới hạn. Ở đây ta chỉ giới hạn trong việc diễn đạt có tính chất mô tả, ta nói rằng một hàm số là liên tục nếu đồ thị của nó là một đường cong trơn không « đứt đoạn » ở đâu cả. Muốn giải thích một hàm u = f(x) là liên tục hay không liên tục *tại điểm* $x = x_1$, ta sẽ cho biến độc lập x tiến dần liên tục đến giá trị x_1 từ bên phải và từ bên trái. Khi đó giá trị của hàm u = f(x) thay đổi nếu như hàm đó không phải là hằng



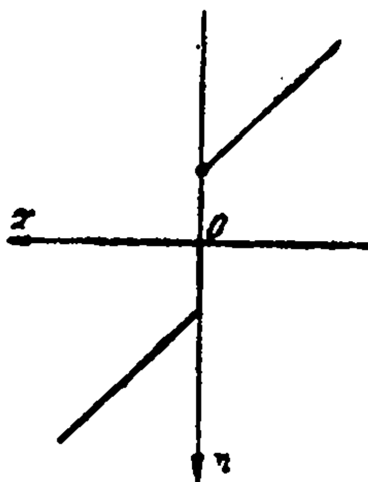
H.155. x = arctgu

số trong lân cận điểm x_1. Nếu giá trị của hàm f(x) dần vô hạn đến giá trị $f(x_1)$ của hàm số tại điểm $x = x_1$ đã chọn (« dần tới giới hạn $f(x_1)$ ») không phụ thuộc vào x tiến đến x_1 *từ phía này hay phía khác* thì ta nói rằng hàm f(x) *liên tục tại* điểm x_1. Nếu điều này xảy ra tại mỗi điểm x_1 thuộc một khoảng nào đó thì ta nói rằng hàm là *liên tục trong khoảng đó.*

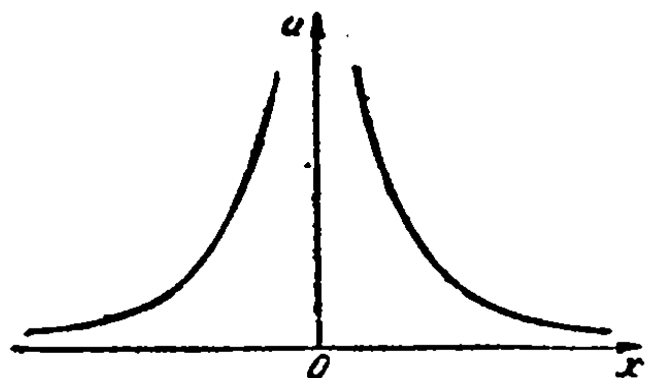
Dù rằng mỗi hàm số có đồ thị trơn là liên tục, nhưng cũng dễ xác định được những hàm không phải là liên tục ở mọi nơi.



H. 156. $u = \sin \frac{1}{x}$



H.157. Sự gián đoạn bằng « bước nhảy »



H.158. Sự gián đoạn ra xa vô tận

Thí dụ, hàm trên H.157 xác định với mọi giá trị của x theo công thức:

$$f(x) = 1 + x \quad \text{khi } x > 0$$
$$f(x) = -1 + x \quad \text{khi } x \leqslant 0$$

gián đoạn tại điểm $x_1 = 0$, tại đó nó có giá trị -1. Nếu vẽ đồ thị của hàm số này bằng bút chì thì ta nhận thấy rằng tại điểm đó ta phải nhấc bút chì khỏi tờ giấy. Khi ta đi dần đến giá trị $x_1 = 0$ thì $f(x)$ dần tới $+1$. Nhưng giá trị này khác với giá trị của hàm số tại chính điểm đó, tức là -1. Sự kiện hàm $f(x)$ tiến tới -1 khi x tiến tới 0 từ *bên trái* chưa phải là đủ để xác nhận tính liên tục.

Hàm $f(x)$ xác định với mọi giá trị x nhờ công thức $f(x) = 0$ với $x \neq 0$, $f(0) = 1$ khi $x_1 = 0$ có sự gián đoạn kiểu khác. Ở đây có cả giới hạn bên phải bên trái và các giới hạn đó bằng nhau nhưng giá trị giới hạn chung đó khác $f(0)$. Hàm số $u = f(x) = 1/x^2$ mà đồ thị vẽ trên H.158 còn thể hiện một kiểu gián đoạn khác tại điểm $x = 0$. Nếu cho x dần tới 0 từ bất cứ phía nào thì u cũng dần tới vô hạn nhưng đồ thị của hàm « đứt đoạn » tại điểm đó, mỗi sự thay đổi nhỏ của biến độc lập x trong lân cận điểm $x = 0$ kéo theo sự thay đổi rất lớn của biến phụ thuộc u. Nói cho đúng thì giá trị của hàm không xác định khi $x = 0$ vì ta không xem vô hạn là một số; bởi thế không thể nói hàm $f(x)$ « dần tới vô hạn » khi x dần tới 0.

Cuối cùng, sự gián đoạn của hàm số $u = \sin 1/x$ tại điểm $x = 0$ lại có đặc tính hoàn toàn khác (H. 156).

Những thí dụ vừa nêu thể hiện một số trường hợp điển hình khác nhau của hàm không liên tục tại một điểm $x = x_1$ nào đó.

1) Có thể xảy ra trường hợp hàm sẽ trở thành liên tục tại điểm $x = x_1$ nếu ta làm cho nó xác định hoặc thay đổi giá trị xác định của nó tại $x = x_1$. Thí dụ, hàm $u = x/x$ không đổi bằng 1 với $x \neq 0$, không xác định khi $x = 0$ vì $0/0$ không có nghĩa. Nhưng nếu ta qui ước rằng giá trị $u = 1$ cũng tương ứng với giá trị $x = 0$ thì hàm được « mở rộng » như vậy sẽ liên tục

tại mọi điểm. Cũng sẽ đạt được kết quả như vậy nếu ta thay đổi giá trị của hàm tại $x = 0$ trong thí dụ thứ hai vừa dẫn; thay cho $f(0) = 1$ ta đặt $f(0) = 0$. Gián đoạn loại này gọi là gián đoạn *khử được*.

2) Hàm dần tới các giới hạn khác nhau tùy theo x dần tới x_1 từ trái hay từ phải (như H. 157).

3) Không có giới hạn ở cả hai phía (như H. 156).

4) Hàm dần tới vô hạn khi x dần tới x_1 (như H. 158).

Các gián đoạn thuộc ba loại sau gọi là gián đoạn *thực sự* hoặc gián đoạn *không khử được*: chúng không thể bị khử nhờ cách xác định giá trị của hàm tại chỉ một điểm $x = x_1$.

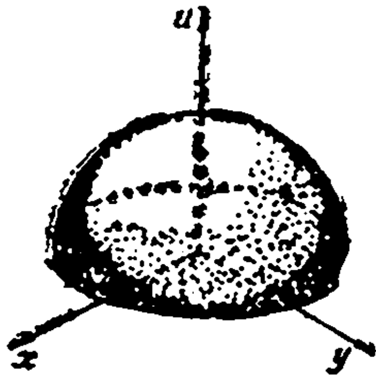
*** 6. Hàm nhiều biến** Ta trở lại xét một cách hệ thống khái niệm hàm. Nếu biến độc lập P là một điểm của mặt phẳng với các tọa độ x, y và nếu mỗi điểm P tương ứng với một số duy nhất u (chẳng hạn, u có thể là khoảng cách từ điểm P đến gốc tọa độ) khi đó ta viết:

$$u = f(x,y)$$

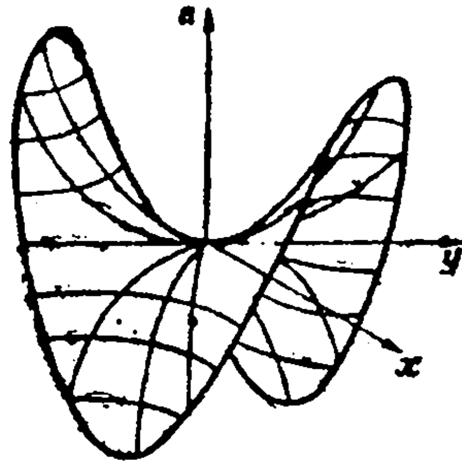
Cách biểu diễn này cũng được dùng trong trường hợp hai đại lượng x và y đã được chỉ ra một cách tường minh như là các biến độc lập bởi chính các giả thiết của bài toán. Thí dụ, áp suất u của chất khí là hàm số của thể tích x và nhiệt độ y, diện tích u của tam giác là hàm số $u = f(x,y,z)$ của độ dài ba cạnh x,y,z của nó.

Cũng như đồ thị cho biểu diễn hình học của hàm một biến, có thể thu được biểu tượng hình học của hàm $u = f(x,y)$ hai biến dưới dạng một mặt trong không gian ba chiều với các biến x,y,u là các tọa độ. Ta cho ứng một điểm (x,y) trong mặt phẳng x, y với một điểm của không gian có các tọa độ x,y và $u = f(x,y)$. Như vậy $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ được biểu diễn bởi một nửa mặt cầu có phương trình $u^2 + x^2 + y^2 = 1$. Hàm tuyến

tính $u = ax + by + c$ được biểu diễn bởi một mặt phẳng. Hàm $u = xy$ được biểu diễn bởi một mặt paraboloid, hypebolic v.v...

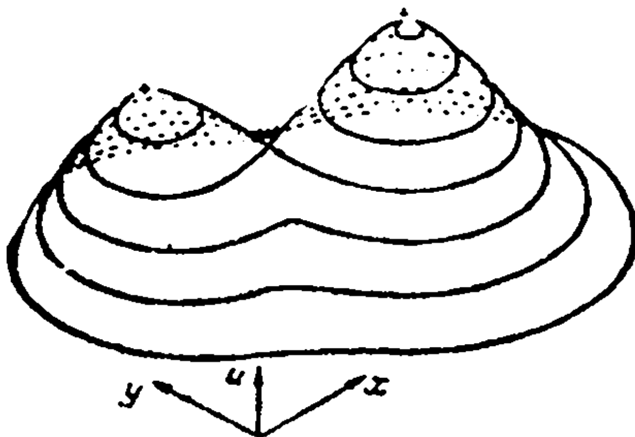


H. 159. Nửa mặt cầu

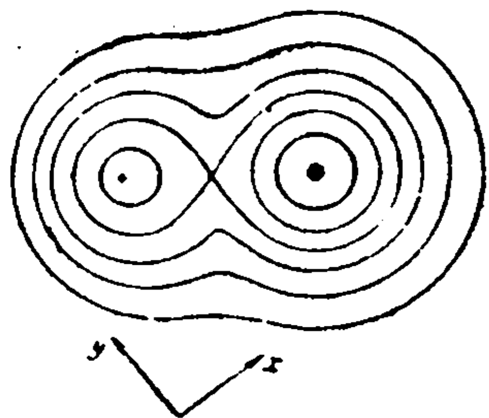


H. 160 Paraboloid hypebolic

Cũng có thể cho một biểu tượng khác nữa của hàm $u = f(x,y)$ mà không vượt ra khỏi giới hạn của mặt phẳng x, y nhờ *đường mức (đường nằm ngang)*. Đáng lẽ khảo sát « phong cảnh » ba chiều của mặt $u = f(x, y)$ trong không gian ba chiều thì ta lại vẽ các « đường mức »



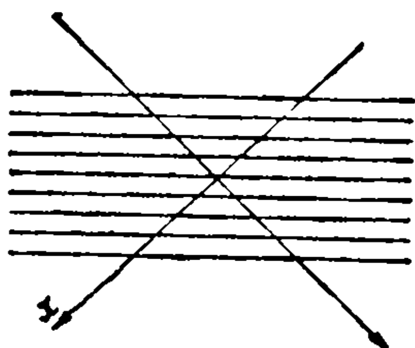
H. 161. Mặt dạng $= f(x,y)$



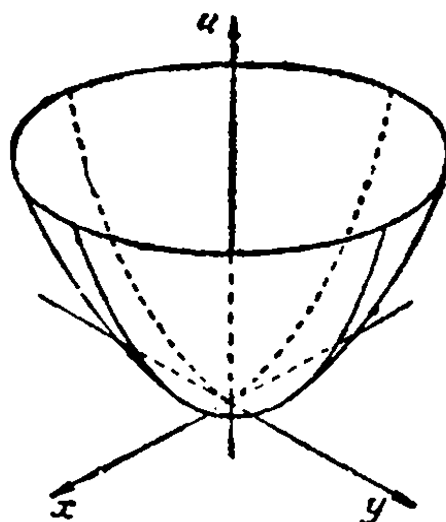
H. 162. Các đường mức của mặt biểu diễn trên H.161

(thường làm như vậy trên các bản đồ địa lý) của hàm. Chúng là những hình chiếu trên mặt phẳng x, y của

tất cả các điểm của mặt có cùng một khoảng cách u theo đường thẳng đứng tới mặt phẳng x, y. Những đường này có phương trình dạng $f(x,y) = c$, trong đó



H. 163. Các đường mức của mặt $u = x + y$



H. 164. Paraboloid quay.

c là không đổi đối với mỗi đường cong. Chẳng hạn như hàm $u = x + y$ được đặc trưng bởi hình 163. Đường mức của mặt cầu là một họ các đường tròn đồng tâm. Hàm $u = x^2 + y^2$ tương ứng với một paraboloid quay cũng được dặc trưng bởi những đường tròn (H. 164) Có thể chỉ độ cao $u = c$ bởi các số ghi bên cạnh mỗi đường cong. Các hàm nhiều biến được gặp trong vật lý khi mô tả chuyển động của một môi trường liên tục hoặc những sự vật kéo dài tùy ý. Ta xét một sợi dây đàn căng giữa hai điểm trên trục x, sau đó biến dạng nó sao cho một phần tử có tọa độ x bị kéo lên khỏi trục một khoảng nhất định nào đó. Nếu buông dây ra thì nó sẽ chuyển động, tức là bắt đầu dao động, khi đó một điểm (phần tử) của dây với tọa độ ban đầu x tại thời điểm t sẽ cách trục x một khoảng $u = f(x, t)$. Chuyển động của dây đàn sẽ được xác định hoàn toàn nếu biết hàm $u = f(x, t)$.

Định nghĩa tính liên tục đối với hàm một biến sẽ được trực tiếp phát triển trên hàm nhiều biến. Ta nói hàm $u = f(x,y)$ là liên tục tại điểm $x = x_1$, $y = y_1$ nếu giá trị $f(x,y)$ luôn luôn dần tới giá trị $f(x_1, y_1)$ khi điểm (x, y) dần tới điểm (x_1, y_1) theo mọi phương hướng, bằng mọi cách.

Tuy nhiên, có sự khác biệt quan trọng giữa các hàm một biến và hàm nhiều biến. Trong trường hợp nhiều biến thì khái niệm hàm ngược mất ý nghĩa, vì ta không thể giải phương trình $u = f(x, y)$ (chẳng hạn phương trình $u = x + y$) sao cho *mỗi* biến độc lập x và y biểu thị được chỉ bằng *một* biến u. Nhưng sự khác biệt này sẽ mất đi nếu ta khảo sát các biến đổi hoặc các ánh xạ.

*7 **Hàm và biến đổi.** Sự tương ứng giữa các điểm của một đường thẳng l nào đó (được đặc trưng bởi tọa độ x trên đường thẳng đó) và các điểm của một đường thẳng l' (được đặc trưng bởi tọa độ x') không có gì khác là hàm $x' = f(x)$. Trong trường hợp tương ứng là đơn trị hai chiều thì cũng có hàm ngược $x = g(x')$. Biến đổi xạ ảnh là thí dụ đơn giản nhất. Trong trường hợp tổng quát nhất nó được cho bởi một hàm phân thức tuyến tính có dạng:

$$x' = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

trong đó a, b, c, d là các hằng số (ở đây ta thừa nhận không chứng minh).

Trong thí dụ này, hàm ngược có dạng $x = \dfrac{-dx' + b}{cx' - a}$

Nếu ta thiết lập một ánh xạ của mặt phẳng π với hệ tọa độ x, y lên một mặt phẳng khác π' với hệ tọa độ x', y' thì hệ thức giữa các điểm không thể cho được bằng một hàm $x' = f(x)$. Ở đây phải xét đến hai hàm hai biến:

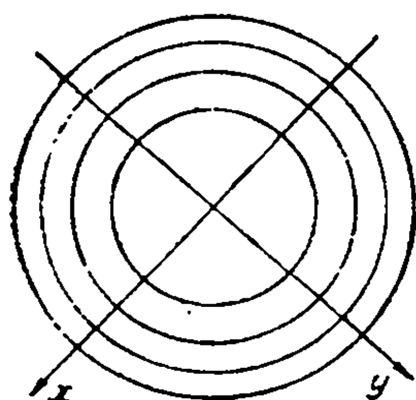
$$x' = f(x, y)\ ;\ y' = g(x, y).$$

Chẳng hạn, một biến đổi xạ ảnh được cho bởi một hệ thống các hàm

$$x' = \frac{ax + by + c}{gx + hy + k}$$

$$y' = \frac{dx + ey + f}{gx + hy + k}$$

trong đó a, b,... k là các hằng số, còn x, y và x', y' là các tọa độ tương ứng trong hai mặt phẳng. Bây giờ thì ánh xạ ngược lại có ý nghĩa. Ta phải giải hệ phương trình đã cho đối với x và y sau khi biểu thị chúng là x' và y'. Về mặt hình học thì điều này dẫn tới việc thực hiện một ánh xạ ngược của mặt phẳng π' lên mặt phẳng π. Ánh xạ này sẽ được xác định một cách đơn trị nếu tương ứng giữa các điểm của hai mặt phẳng là một—một.



H. 165. Cán đường mức tương ứng

Những biến đổi của mặt phẳng đã được nghiên cứu trong tôpô không những chỉ được cho bằng các phương trình đại số mà nói chung còn được cho bởi một hệ tùy ý hai hàm:

$$x' = f(x, y)$$
$$y' = g(x, y)$$

với điều kiện chúng xác định một biến đổi một — một và liên tục hai chiều.

§ 2. GIỚI HẠN

1. Giới hạn của dãy a_n. Như đã thấy trong §1, định nghĩa tính liên tục của một hàm được dựa vào khái niệm giới hạn. Cho đến bây giờ ít hay nhiều ta đã

dùng khái niệm đó dưới hình thức trực giác. Trong phần này và các phần sau ta sẽ đưa khái niệm đó vào một cách hệ thống hơn. Ta bắt đầu với việc nghiên cứu các dãy vì dãy phần nào đơn giản hơn hàm có biến liên tục.

Trong chương II ta đã nghiên cứu các dãy số a_n và nghiên cứu giới hạn của chúng với điều kiện n tăng vô hạn hoặc « dần tới » vô hạn. Thí dụ, dãy có số hạng

tổng quát $a_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ (1)

khi n tăng vô hạn có giới hạn 0 : $1/n \to 0$ khi $n \to \infty$(2). Ta sẽ cố gắng biểu thị chính xác ý nghĩa đó. Khi càng đi xa theo dãy, ta thấy các số hạng càng ngày càng nhỏ.

Sau số hạng thứ 100 thì các số hạng đã nhỏ hơn $\frac{1}{100}$;

sau số hạng thứ 1000 thì đã nhỏ hơn 1/1000 v.v... Không có số hạng nào bằng 0. Nhưng nếu ta đi theo dãy (1) *đủ xa* thì ta có thể tin chắc rằng mỗi số hạng của nó sẽ khác 0 *nhỏ bao nhiêu cũng được*. Trong sự giải thích này còn một điều băn khoăn là ý nghĩa của các từ in nghiêng chưa hoàn toàn rõ ràng. « Đủ xa » và « nhỏ bao nhiêu cũng được » nghĩa là gì ? Nếu ta cho chúng những ý nghĩa chính xác thì sẽ có được ý nghĩa chính xác của khái niệm giới hạn của một dãy.

Một thể hiện hình học sẽ giúp ta giải đáp vấn đề. Nếu ta biểu diễn các số hạng của dãy (1) bằng những điểm tương ứng trên trục số thì ta nhận thấy các số hạng của dãy « tập trung » lại lân cận điểm O. Ta chọn trên trục số một đoạn I nào đó có tâm ở điểm O và có độ dài 2ε sao cho đoạn trải trên khoảng cách ε từ mỗi phía của điểm O. Nếu ta lấy $\varepsilon = 10$, thì tất nhiên mọi số

hạng $a_n = 1/n$ của dãy sẽ nằm trong đoạn I. Nếu ta lấy $\varepsilon = 1/10$ thì một số số hạng sẽ nằm ngoài đoạn I. Song, mọi số hạng bắt đầu từ a_{11} tức là

$$\frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{14}, \frac{1}{14}, \ldots$$

sẽ nằm trong I. Thậm chí khi $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ thì chỉ có một nghìn số hạng đầu tiên không nằm trong đoạn I, còn thì vô số hạng bắt đầu từ a_{1001} như a_{1001}, a_{1002}, a_{1003},... đều ở trong đó. Rõ ràng lập luận này đúng với mọi số dương ε. Nếu đã chọn trước số dương ε, thì dù nó nhỏ như thế nào, bao giờ ta cũng chọn được số nguyên đủ lớn N sao cho $1/N < \varepsilon$. Do đó, mọi số hạng a_n của dãy mà $n \geqslant N$ đều nằm trong đoạn I, chỉ có một số hữu hạn số hạng a_1, a_2... a_{N-1} nằm ngoài đoạn I. Những mốc cơ bản ở đây là: đầu tiên, độ dài đoạn I được xác định bằng cách chọn ε. Sau đó có thể chọn số nguyên thích hợp N. Quá trình lựa chọn ban đầu số ε và lựa chọn số nguyên N tiếp sau có thể thực hiện được với mọi ε dương tùy ý không phụ thuộc vào độ nhỏ của nó, chính điều này đã tạo nên ý nghĩa chính xác của khẳng định « mọi số hạng của dãy (1) sai khác 0 một lượng nhỏ bao nhiêu cũng được nếu như ta đi đủ xa theo dãy đó ».

Tóm lại: Giả thử ε là số dương tùy ý. Ta có thể chọn một số N nguyên dương sao cho mọi số hạng a_n của dãy (1) với $n \geqslant N$ đều nằm trong đoạn I dài 2ε và tâm ở điểm 0. Đó là ý nghĩa của hệ thức giới hạn (2).

Dựa vào thí dụ trên, bây giờ ta có thể nêu định nghĩa chính xác của khẳng định tổng quát sau đây: « dãy số thực a_1, a_2, a_3... có giới hạn a ». Ta bao hàm số a bên trong một đoạn I nào đó của trục số; nếu đoạn đó nhỏ thì một số các a_n có thể nằm ngoài đoạn nhưng khi n

đủ lớn ($n \geqslant N$) thì mọi số a_n phải nằm trong đoạn I. Tất nhiên, có thể phải chọn số nguyên N rất lớn nếu đoạn I đã chọn khá nhỏ, song dù đoạn I nhỏ bao nhiêu cũng tồn tại số N vì ta giả thiết rằng dãy có giới hạn.

Sự kiện dãy a_n có giới hạn a được biểu thị bằng ký hiệu như sau:

$$\lim a_n = a \text{ khi } n \to \infty \text{ hoặc đơn giản}$$

$$a_n \to a \text{ khi } n \to \infty \text{ hoặc } \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Nếu một dãy có giới hạn theo ý nghĩa vừa nêu thì được gọi là *dãy hội tụ.* Định nghĩa tính hội tụ của một dãy a_n có thể phát biểu chặt hơn như sau:

Dãy $a_1, a_2, a_3...$ gọi là có giới hạn a khi n tăng vô hạn nếu với mỗi số dương ε tùy ý nhỏ có thể cho tương ứng một số nguyên dương N (phụ thuộc vào ε) sao cho bất đẳng thức $a - a_n < \varepsilon$ (3) được thực hiện với mọi $n \geqslant N$.

Đó là một diễn đạt tổng quát, « trừu tượng » của khái niệm giới hạn của một dãy. Nếu người nào lần đầu tiên gặp định nghĩa này mà chưa nắm được hoặc chưa hiểu hết nội dung của nó thì là điều rất bình thường. Tiếc thay, các tác giả một số sách đã đứng trên lập trường gần như theo lối phô trương, đã trình bày với bạn đọc định nghĩa này mà không có sự chuẩn bị chu đáo, dường như là một sự hạ cố để giải thích vấn đề thấp hơn chân giá trị của toán học. Ở mọi mức độ nào đấy, định nghĩa đòi hỏi sự thảo luận giữa hai người A và B. A nêu yêu cầu: đại lượng a cho trước phải gần các số a_n sao cho sai số không vượt quá giới hạn $\varepsilon = \varepsilon_1$. B trả lời yêu cầu đó bằng cách chỉ ra có sự tồn tại một số nguyên $N = N_1$ sao cho mọi a_n đứng sau a_{N_1} thỏa mãn điều kiện nêu ra. A đề ra yêu cầu mới với ε nhỏ hơn: $\varepsilon = \varepsilon_2$. B một lần nữa lại thỏa mãn yêu cầu đó bằng cách chọn ra được một số nguyên lớn

hơn $N = N_2$ có tính chất tương tự v.v... Nếu B có thể thỏa mãn A trước mọi yêu cầu dù nhỏ bao nhiêu mà A đề ra thì ta có một tình thế có thể biểu thị ngắn gọn bằng hệ thức $a_n \to a$.

Có một khó khăn nhất định về mặt tâm lý trong việc hình thành một biểu tượng đúng đắn về khái niệm giới hạn. Trực giác của chúng ta đòi hỏi một tư tưởng « động » của giới hạn xem như là kết quả của một quá trình « chuyển động »: ta đi theo dãy số nguyên 1, 2, 3... n,... và quan sát hành vi của dãy a_n. Ta chờ đợi số a_n phải càng ngày càng ít khác với số a. Nhưng quan điểm « tự nhiên » đó không thích hợp với sự diễn đạt rõ ràng về mặt toán học. Muốn đạt tới một định nghĩa chính xác, cần phải đảo ngược quá trình lập luận: đáng nhẽ phải chú ý trước tiên đến biến độc lập n_n rồi mới chú ý đến biến a_n, ta phải đặt cơ sở cho định nghĩa của ta vào vấn đề: cần làm gì nếu như ta muốn kiểm tra được về thực chất khẳng định $a_n \to a$. Với tình hình như vậy, trước hết ta phải chọn một đoạn tùy ý nhỏ chứa a rồi xem xét với việc chọn n đủ lớn, liệu có thể làm cho a_n rơi vào khoảng đó hay không. Sau đó bằng cách đưa vào các ký hiệu ε và N để biểu thị « một đoạn tùy ý nhỏ » và « n đủ lớn », ta sẽ đạt đến định nghĩa chính xác của giới hạn.

Bây giờ ta xét đến một thí dụ khác, dãy:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

trong đó $a_n = \frac{n}{n+1}$. Ta khẳng định $\lim a_n = 1$. Nếu chọn một khoảng có tâm ở điểm 1 và lấy $\varepsilon = \frac{1}{10}$ thì khi chọn $N = 10$, ta sẽ thỏa mãn yêu cầu (3). Thực vậy:

$$0 < 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10} \text{ khi } n \geqslant 10.$$

Nếu với yêu cầu cao hơn, ta chọn $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ thì với $N = 1000$ yêu cầu sẽ được thỏa mãn. Cứ tiếp tục như vậy, đối với số dương ε tùy ý đã chọn, ta cũng thỏa mãn được yêu cầu, bằng cách chọn số nguyên N bất kỳ lớn hơn $\frac{1}{\varepsilon}$. Quá trình này bao gồm, một là, việc chọn một khoảng nhỏ tùy ý có độ dài 2ε xung quanh số a và, hai là, việc chứng minh mọi số hạng của dãy a_n cách a nhỏ hơn ε nếu như ta đi theo dãy đó đủ xa, tức là sự mô tả tỉ mỉ sự kiện $a_n \to a$. Nếu các số hạng của dãy $a_1, a_2, \ldots$ được biểu thị dưới dạng các phân số thập phân vô hạn thì khẳng định $\lim a_n = a$ biểu thị rằng, với mọi số nguyên dương m thì m chữ số đầu tiên của số a_n sẽ trùng với m chữ số đầu tiên của dạng thập phân vô hạn của số a nếu như đã chọn n đủ lớn, bằng N khá lớn nào đó (phụ thuộc vào m). Điều này thật giản đơn và tương ứng với việc chọn ε dưới dạng 10^{-m}.

Còn có một định nghĩa khác rất gợi cảm của khái niệm giới hạn. Nếu $\lim a_n = a$ và nếu ta bao hàm số a trong khoảng I, thì dù khoảng I nhỏ bao nhiêu, tất cả các số a_n với n lớn hơn một số nguyên khá lớn nào đó N sẽ nằm trong khoảng I, tức là có không quá một số hữu hạn $N - 1$ số hạng trong các số hạng sau:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{N-1},$$

có thể nằm ngoài đoạn I. Nếu đoạn I rất nhỏ thì số N có thể rất lớn, chẳng hạn bằng 100 hoặc thậm chí 1000 tỷ, cũng chỉ có một số hữu hạn các số hạng của dãy nằm ở ngoài đoạn I; đồng thời vô số số hạng còn lại sẽ rơi vào trong khoảng I. Có thể qui ước nói về các số hạng của một dãy vô hạn nào đó như sau: « hầu hết » các số hạng có một tính chất nào đó trong

khi chỉ có một số hữu hạn số hạng (dù số đó lớn đến đâu cũng không quan trọng) không có tính chất ấy. Chẳng hạn như « hầu hết » các số nguyên dương là lớn hơn 1000000000000. Dùng thuật ngữ đó ta thấy khẳng định $\lim a_n = a$ tương đương với khẳng định sau đây:

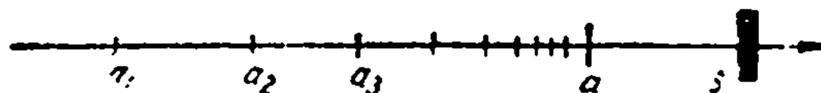
Nếu I là một khoảng tùy ý có tâm ở điểm a thì hầu hết các số a_n nằm trong khoảng này.

Nhân đây ta lưu ý rằng không cần thiết phải đòi hỏi mọi số hạng a_n của dãy có giá trị khác nhau. Nói riêng, hoàn toàn có thể thừa nhận được một số nào đó hoặc vô số, thậm chí mọi số a_n có thể bằng giá trị giới hạn a. Chẳng hạn, việc xét dãy số $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ..., $a_n = 0$ ..., là hoàn toàn hợp lý và giới hạn của nó tất nhiên là 0.

Như đã nói, dãy a_n có giới hạn a được gọi là dãy *hội tụ*. Dãy không có giới hạn được gọi là dãy *phân kỳ*.

Nếu trong dãy a_n, các số hạng đều tăng sao cho sớm hay muộn trở nên lớn hơn một số K cho trước tùy ý thì ta qui ước nói rằng *a_n dần tới vô hạn* và viết là $\lim a_n = \infty$ hoặc $a_n \to \infty$. Thí dụ: $n^2 \to \infty$ và $2^n \to \infty$. Thuật ngữ này, tuy có chỗ tiện lợi nhưng chưa nhất quán về ký hiệu, ∞ không được xem như một số. *Một dãy dần tới vô hạn được xem là dãy phân kỳ.*

Người bắt đầu học thường mắc sai lầm cho rằng việc chuyển qua giới hạn khi $n \to \infty$ có thể được thực hiện bằng cách thay thế đơn giản $n = \infty$ vào biểu thức số hạng tổng quát a_n. Chẳng hạn, $1/n \to 0$ vì $\frac{1}{\infty} = 0$. Nhưng ký hiệu ∞ không phải là một số, việc dùng nó trong biểu thức $\frac{1}{\infty}$ là không hợp pháp. Ý định coi giới hạn của dãy, là số hạng « cuối cùng » của dãy a_n khi $n = \infty$ sẽ không đạt được mục đích và làm mờ thêm nhận thức đúng đắn bản chất của vấn đề.



H. 166. Dãy giới nội đơn điệu.

2. Các dãy đơn điệu. Trong định nghĩa tổng quát về tính hội tụ và giới hạn không có các yêu cầu về đặc điểm dần tới giới hạn a của dãy hội tụ a_1, a_2, a_3... Một kiểu dần tới đơn giản nhất, được thực hiện bởi các dãy gọi là dãy *đơn điệu*. Thí dụ : dãy $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$
Mỗi số hạng của dãy lớn hơn số hạng đứng trước nó. Thực vậy :

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} >$$

$$> 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = a_n$$

Một dãy như thế, trong đó $a_{n+1} > a_n$ được gọi là dãy *đơn điệu tiến*. Tương tự, một dãy mà $a_n > a_{n+1}$ chẳng hạn như 1, 1/2, 1/3... được gọi là dãy đơn *điệu lùi*. Các dãy thuộc hai loại này chỉ có thể dần tới giới hạn từ một phía : « từ trái » hoặc « từ phải ». Ngược lại, có những dãy « giao động », chẳng hạn — 1, 1/2, —1/3, 1/4... Dãy này dần tới giới hạn 0 « từ cả hai phía ».

Dãy đơn điệu có các tính chất đặc biệt đơn giản. Một dãy loại đó có thể không giới nội và tăng lên vô hạn, như dãy 1, 2, 3, 4,... trong đó $a_n = n$ hoặc dãy 2, 3, 5, 7 11, 13... trong đó a_n là số nguyên tố thứ n(p_n). Trong trường hợp này, dãy dần tới vô hạn. Nhưng, nếu một dãy đơn điệu tiến là giới nội, tức là nếu mỗi số hạng của nó nhỏ hơn một cận trên B nào đó cho trước thì, bằng trực giác ta thấy rõ ràng dãy phải dần tới một giới hạn a xác định nào đó không vượt quá

số B. Ta sẽ phát biểu tình hình này thành một *nguyên lý của các dãy đơn điệu: Một dãy đơn điệu tiến bị chặn trên sẽ hội tụ đến một giới hạn* (đối với dãy đơn điệu lùi bị chặn dưới cũng có một khẳng định tương tự). Có điều đặc biệt là giá trị của giới hạn a không được cho biết trước; định lý khẳng định nếu các giả thiết nêu ra được thực hiện thì giới hạn *tồn tại*. Tất nhiên định lý này chỉ đúng với điều kiện trước đó phải đưa vào số vô tỉ. Nếu không, nó sẽ không phải bao giờ cũng đúng. Thực vậy, trong chương II, ta thấy mỗi số vô tỉ ($\sqrt{2}$ chẳng hạn) là giới hạn của một dãy đơn điệu và giới nội gồm các phân số thập phân hữu tỉ được tạo nên khi cắt đuôi một phân số thập phân vô hạn sau chữ số thứ n.

* Tuy rằng các nguyên lý về dãy đơn điệu là hoàn toàn hiển nhiên về mặt trực giác và được xem như một chân lý tuyệt đối, nhưng không có gì ngăn cản ta (thậm chí còn rất có ích) chứng minh nó hoàn toàn chặt chẽ theo phong cách hiện đại. Muốn vậy phải chứng tỏ rằng nguyên lý này là kết luận logic của định nghĩa số thực và định nghĩa giới hạn.

Giả thiết các số a_1, a_2, a_3... lập thành một dãy đơn điệu tăng nhưng giới nội. Ta có thể biểu thị các số hạng của dãy dưới dạng những phân số thập phân vô hạn:

$$a_1 = A_1, p_1p_2p_3\dots$$
$$a_2 = A_2, q_1q_2q_3\dots$$
$$a_3 = A_3, r_1r_2r_3\dots$$
$$\dots\dots$$

Trong đó A_i là các số nguyên còn p_i, q_i, r_i... v.v là các chữ số từ 0 đến 9. Bây giờ ta theo dõi cột số nguyên A_1, A_2, A_3,... từ trên xuống. Vì dãy a_1, a_2, a_3,... giới nội cho nên những số nguyên này không thể tăng lên vô hạn. Vì đơn điệu tăng cho nên các số nguyên của dãy A_1, A_2, A_3... *phải còn lại không đổi sau khi đã đạt tới một giá trị cực đại nào đó.* Ta ký hiệu giá trị cực đại đó là A và giả thử đạt tới nó ở dòng thứ N. Bây giờ ta theo dõi cột thứ hai p_1, q_1, r_1,... và tập trung chú ý vào dòng thứ N_0 và các dòng tiếp sau đó. Nếu x_1 là chữ số lớn nhất xuất hiện ở cột đó sau dòng thứ N_0 thì chữ số

này sẽ phải luôn luôn xuất hiện sau lần xuất hiện thứ nhất đó*. Ta giả thử sự kiện này xảy ra ở dòng thứ N_1 ($N_1 \geqslant N_0$). Sau đó ta lại xét các chữ số p_2, q_2, r_2... của cột thứ ba. Lập luận tương tự như trên sẽ chứng tỏ bắt đầu từ một số nguyên $N_2 \geqslant N_1$ nào đó, các chữ số ở cột thứ ba sẽ không đổi và bằng một số x_2 nào đó. Nếu lặp lại quá trình này cho cột thứ 4, thứ 5... thì ta được các chữ số x_3, x_4, x_5... và các số nguyên tương ứng N_3, N_5... Dễ chứng tỏ rằng số $a = A, x_1, x_2, x_3\ x_4$... là giới hạn của dãy $a_1\ a_2$, a_3,... Thực vậy, nếu chọn $\varepsilon \geqslant 10^{-m}$ thì với mọi $n \geqslant N_m$, phần nguyên và m chữ số đầu tiên sau dấu phẩy trong các số a_n và a sẽ trùng nhau tức là hiệu $/a_n - a/$ không thể vượt quá 10^{-m}. Vì điều này có thể thực hiện cho mọi ε bất kỳ dù nhỏ đến đâu bằng cách chọn m đủ lớn, cho nên định lý đã được chứng minh.

Cũng có thể chứng minh định lý này bằng cách dựa vào một trong các định nghĩa số thực đã cho trong chương II. Chẳng hạn, có thể lấy định nghĩa thông qua các đoạn lồng nhau hoặc lát cắt Đêđêkin. Những chứng minh như vậy có thể tìm thấy trong bất kỳ giáo trình giải tích nào.

Nguyên lý về các dãy đơn điệu có thể áp dụng vào chương II để định nghĩa tổng và tích hai phân số thập phân vô hạn dương: $a = A, a_1a_2a_3$... và $b = B, b_1\, b_2\, b_3$ ... Không thể cộng và nhân hai biểu thức này theo cách thông thường bằng cách bắt đầu từ tận cùng bên phải, vì chúng không có số tận cùng bên phải (để làm thí dụ, bạn đọc hãy thử cộng hai phân số thập phân vô hạn: 0,33333 ..., và 0,989898...). Nhưng. nếu ký hiệu x_n biểu thị một phân số thập phân hữu hạn là kết quả của phép cộng các phân số thập phân hữu hạn tạo nên khi «cắt đuôi» các phân tích thập phân a và b sau chữ số thứ n thì dãy x_1, x_2, x_3 ... sẽ đơn điệu tăng và giới nội (chẳng hạn, cận có thể là số $A + B + 2$) Do đó, dãy x_1, x_2, x_3...có giới hạn và ta có thể thừa nhận định nghĩa sau đây:

$$a + b = \lim x_n$$

Cũng có thể định nghĩa tích ab nhờ một quá trình tương tự. Có thể phát triển những định nghĩa này cho mọi trường hợp a và b là những số dương hoặc âm tùy ý bằng cách áp dụng những qui tắc số học thông thường.

---

* Nếu không thế thì dãy a_1, a_2, a_3... sẽ không còn là đơn điệu tăng nữa.

Vai trò quan trọng của khái niệm giới hạn thể hiện ở chỗ nhiều số chỉ có thể định nghĩa được như là những giới hạn (thường là giới hạn của những dãy đơn điệu tăng). Điều đó giải thích tại sao trường số hữu tỉ, trong đó không tồn tại những giới hạn như vậy, là quá chật hẹp so với nhu cầu của toán học.

3. Số Ơle e Ngay sau khi Ơle công bố tác phẩm «Introduction in Analysin Infinitorum»* năm 1748, số e đã chiếm được vị trí quan trọng trong toán học bên cạnh số Acsimet π. Số này cho ta một minh họa tuyệt đẹp cho vấn đề sử dụng nguyên lý về các dãy đơn điệu để xác định một số thực mới. Dùng cách viết vắn tắt thông thường cho tích của n số nguyên đầu tiên: $n! = 1.2.3 \ldots n$, ta khảo sát dãy $a_1, a_2, a_3, \ldots$, trong đó

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} \qquad (4)$$

Các số hạng của dãy a_n đơn điệu tăng vì a_{n+1} suy ra được từ a_n bằng cách thêm vào một số hạng dương $\frac{1}{(n+1)!}$. Ngoài ra, các giá trị a_n bị chặn trên

$$a_n < B = 3. \qquad (5)$$

Thực vậy, ta có:

$$\frac{1}{s!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{s} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{s-1}};$$

từ đó suy ra:

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] < 3.$$

---

* Tiếng Latinh: «Nhập môn giải tích vô hạn»

Ở đây ta dùng đến công thức cho tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân. Trong trường hợp này, theo nguyên lý về các dãy đơn điệu, a_n phải dần tới một giới hạn nào đó khi n dần tới vô hạn, *giới hạn này được ký hiệu bởi chữ e*. Muốn biểu thị sự kiện $e = \lim a_n$, ta có thể viết e dưới dạng « một chuỗi vô hạn »:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \qquad (6)$$

« Đồng nhất thức » này với một dãy dấu chấm ở cuối là một phương pháp khác đơn giản để biểu thị hai khẳng định sau đây:

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!};$$

$$a_n \to e \quad \text{khi} \quad n \to \infty$$

Chuỗi (6) cho phép tính được e với độ chính xác tùy ý. Chẳng hạn, *tổng* (*với 9 chữ số*) các số hạng của chuỗi (6) đến 1/12 ! bằng số $\Sigma = 2,71828183\dots$ (các bạn thử lại xem !). « Sai số », tức là hiệu giữa giá trị gần đúng đó với giá trị thực của e cũng đánh giá được dễ dàng. Đối với hiệu $e - \Sigma$ ta có biểu thức:

$$\frac{1}{13!} + \frac{1}{14!} + \dots < \frac{1}{13!}\left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{13^3} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{13!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{13}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12!}$$

Số này nhỏ đến nỗi không thể ảnh hưởng đến chữ số thứ 9, vì thế nếu chấp nhận một sai số có thể được ở chữ số cuối cùng của giá trị đã nêu ở trên thì ta được một đẳng thức gần đúng gồm có tám chữ số đúng sau đây của e:

$$e \approx 2,7182818$$

* *Số e là số vô tỉ*. Muốn chứng minh, ta giả thiết ngược lại: giả thử $e = p/q$, trong đó p và q là những số nguyên, rồi đưa đến mâu thuẫn để kết luận về sự không đúng của giả

thiết. Vì ta biết rằng $2 < e < 3$ và e không thể là số nguyên, cho nên q ít nhất phải bằng 2. Nhân cả hai vế của đẳng thức (6) với $q! = 1.2.3... q$, ta được:

$$e.q! = p.2.3...(q-1) = [q! + q! + 3.4... q + 4.5... q +$$
$$+ (q-1) q + q] + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + ... \quad (7)$$

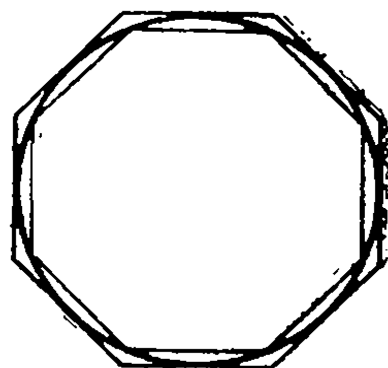
Tất nhiên ở vế trái ta có một số nguyên. Ở vế phải, số hạng trong dấu móc cũng là một số nguyên. Phần còn lại ở vế phải là một số dương nhỏ hơn 1/2, tức là không nguyên. Thực vậy, vì $q \geqslant 2$ cho nên các số hạng của chuỗi $\frac{1}{1+1} + ...$ không vượt quá các số hạng tương ứng của cấp số nhân

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ...$$

mà tổng là $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

Như vậy, công thức (7) là vô lý: số nguyên ở vế trái không thể bằng số ở vế phải vì số sau này là tổng của một số nguyên và một số dương nhỏ hơn 1/3 (không nguyên).

4. Số π Trong toán học ở nhà trường, ta đã biết độ dài đường tròn bán kính đơn vị có thể định nghĩa như giới hạn của dãy chu vi các đa giác đều khi số cạnh của chúng tăng vô hạn. Độ dài đường tròn xác định như vậy được ký hiệu là 2π. Chính xác hơn, nếu ký hiệu chu vi đa giác đều n cạnh nội tiếp là p_n, chu vi đa giác đều n cạnh ngoại tiếp là q_n thì bất đẳng thức sau đúng $p_n < 2\pi < q_n$. Khi n tăng, hai dãy p_n và q_n đơn điệu dần đến 2π. Tại mỗi lúc ta được một sai số ngày càng nhỏ của p_n và q_n đối với số 2π.



H. 167. xấp xỉ đường tròn bằng các đa giác

Ta đã có biểu thức:

$$p_{2^m} = 2^m\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$$

chứa m — 1 căn thức. Có thể dùng công thức này để tính giá trị gần đúng của số 2π.

Số π là số như thế nào? Bất đẳng thức $p_n < 2\pi < q_n$ sẽ giải đáp đầy đủ vấn đề đó khi triển khai dãy các đoạn lồng nhau thu dần đến điểm 3π. Nhưng ta còn muốn biết nhiều hơn vì câu giải đáp đó chưa nói gì về bản chất số π: là số hữu tỉ hoặc vô tỉ, đại số hoặc siêu việt? Số π là số siêu việt, do đó nó là số vô tỉ. Chứng minh của Lămbe (1728—1777) về tính vô tỉ của π là rất khó, không thể nêu ra ở đây. Tuy nhiên, có thể thông báo một loạt kết quả nghiên cứu về số π. Lưu ý rằng số nguyên là cơ sở quan trọng của toán học, ta có thể nêu ra vấn đề: liệu số π có mối liên hệ đơn giản và trực tiếp với số nguyên hay không? Dù phân tích thập phân của số π đã được tính toán đến vài trăm chữ số thập phân, nhưng cũng không phát hiện được một qui luật nào. Điều này không có gì lạ vì hầu như π và số 10 không có gì chung với nhau. Song, Ơle (thế kỷ XVIII) và những người khác đã tìm được những biểu thức rất đẹp liên hệ số π với các số nguyên nhờ các chuỗi và các tích vô hạn. Những công thức đơn giản nhất có lẽ là như sau:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

biểu thị $\frac{\pi}{4}$ như là giới hạn khi n tăng của tổng

$$s_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

Ta sẽ suy ra công thức này ở chương VIII. Sau đây là một chuỗi vô hạn khác để tính số π:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots$$

Còn một biểu thức kỳ lạ nữa cho số π đã được nhà toán học Anh Giòn Uôlix (1616 — 1703) tìm ra. Công thức của ông khẳng định như sau:

$$\left\{\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right\}\to\frac{\pi}{2}$$

khi $n\to\infty$.

Nó thường được viết dưới dạng vắn tắt như sau:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

(các biểu thức tương tự như vế phải được gọi là *các tích vô hạn*).

Chứng minh của hai công thức cuối cùng này có thể có ở bất kỳ một giáo trình giải tích hoàn chỉnh nào.

5. **Phân số liên tục** Những quá trình vô hạn rất lý thú thường xảy ra cùng với các phân số liên tục. Một phân số hữu hạn như sau:

$$\frac{57}{17}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}},$$

chính là một số hữu tỉ nào đó. Ta đã chứng minh rằng mỗi số hữu tỉ có thể biểu diễn được dưới dạng như thế nhờ algôrit Ơclid. Song, trong trường hợp các số vô tỉ thì algôrit đó không kết thúc sau một số hữu hạn phép tính. Trái lại, nó đưa đến một dãy các phân số ngày càng dài, trong đó mỗi phân số chính là một số hữu tỉ. Đặc biệt, mọi số đại số thực bậc hai đều có thể biểu diễn được bằng cách như vậy. Chẳng hạn, ta xét số $x=\sqrt{2}-1$ là nghiệm của phương trình bậc hai:

$$x^2+2x=1 \text{ hoặc } x=\frac{1}{2+x}.$$

Nếu thay x trong vế phải bởi phân thức $\frac{1}{2+x}$ một lần nữa thì ta có biểu thức:

$$x = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}, \text{ và sau đó } x = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}},$$

v. v..., sau n « bước » ta được đẳng thức:

$$x = \left.\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{}{2+\dots \dots+\cfrac{1}{2+x}}}}\right\} \quad (n \text{ « bước »})$$

Nếu n dần tới vô hạn, ta được một « phân số liên tục vô hạn »

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$$

Công thức đặc biệt này đã liên hệ số $\sqrt{2}$ với các số nguyên bằng một phương thức lạ hơn nhiều so với phân tích thập phân của $\sqrt{2}$, mà trong phân tích này ta không phát hiện được một tính đều đặn nào trong sự xen kẽ các chữ số thập phân cả.

Đối với nghiệm dương của phương trình bậc hai tùy ý có dạng: $x^2 = ax + 1$ hoặc $x = a + \frac{1}{x}$, ta có phân tích

$$x = a + \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\dots}}}$$

Chẳng hạn, đặt a = 1 ta có

$$x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$$

Các thí dụ này là những trường hợp riêng của một định lý tổng quát khẳng định *nghiệm thực của một phương trình bậc hai có hệ số nguyên phân tích được thành các phân số liên tục tuần hoàn* tương tự như các số hữu tỉ phân tích được thành phân số thập phân tuần hoàn.

Ơle đã tìm được những phân tích thành phân số liên tục cho các số e và π khá đơn giản. Ta nêu ra nhưng không chứng minh :

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \dots}}}}}}}}$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \dots}}}}}$$

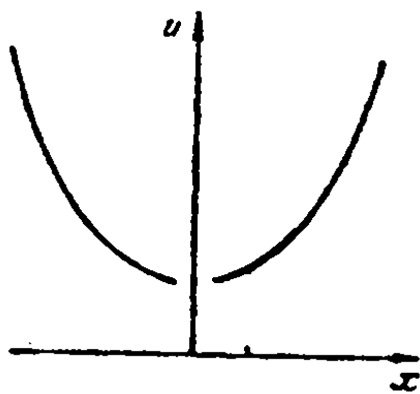
$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \dots}}}}}}$$

§ 3. GIỚI HẠN TRONG SỰ XẤP XỈ LIÊN TỤC

1. Mở đầu. Các định nghĩa tổng quát. Trong § 2 ta đã đạt tới một định nghĩa chính xác của khẳng định « Dãy a_n (tức là hàm $a_n = F(n)$ với biến tự nhiên n) có giới hạn a khi n dần tới vô hạn ». Bây giờ ta cho khẳng định : « Hàm $u = f(x)$ với biến liên tục x có giới hạn a khi x dần đến giá trị x_1 » một định nghĩa tương ứng.

Khái niệm giới hạn trong sự xấp xỉ liên tục của biến độc lập x dưới hình thức trực giác đã được dùng trong § 1, mục 5, khi ta phải xác định xem hàm số đang xét có liên tục tại một điểm cho trước hay không.

Ta lại bắt đầu bằng một thí dụ. Hàm $f(x) = \frac{x + x^3}{x}$ xác định với mọi x khác 0, mẫu số triệt tiêu với $x = 0$.



H. 168. $u = \frac{x + x^3}{x}$

Nếu vẽ đồ thị của hàm $y = f(x)$ cho những giá trị x ở lân cận điểm O thì tất nhiên khi x « dần tới » 0 từ bất kỳ phía nào, các giá trị tương ứng $u = f(x)$ « dần tới » giới hạn 1. Muốn mô tả chính xác sự kiện này, ta tìm một công thức tường minh cho hiệu giữa giá trị của hàm f (x) với số không đổi 1 :

$$f(x) - 1 = \frac{x + x^3}{x} - 1 =$$

$$= \frac{x + x^3 - x}{x} = \frac{x^3}{x}.$$

Nếu ta qui ước chỉ xét những giá trị x dần đến 0 nhưng không bằng 0 (đối với $x = 0$ hàm số f (x) không xác định), ta có thể chia tử và mẫu cho x và được một công thức đơn giản hơn:

$$f(x) - 1 = x^2.$$

Rõ ràng có thể làm cho hiệu đó *nhỏ tùy ý* bằng cách giới hạn sự biến thiên của biến x *đủ nhỏ* trong lân cận giá trị $x = 0$. Chẳng hạn khi $x = \pm 1/10$ ta có $f(x) - 1 = 1/100$; khi $x = \pm 1/100$ ta có $f(x) - 1 = 1/1000$ v.v... Tổng quát, nếu ε là một số dương nào đó, thì dù nó nhỏ bao nhiêu, hiệu giữa f(x) và 1 sẽ nhỏ hơn ε nếu khoảng cách từ điểm x đến điểm O nhỏ hơn số $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Thực vậy, nếu $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ thì

$$|f(x) - 1| = |x^2| < \varepsilon.$$

Sự tương tự với định nghĩa giới hạn của dãy mà ta đã nêu là hoàn toàn. Ta đã chọn định nghĩa: một dãy a_n có giới hạn a khi n dần tới vô hạn nếu, ứng với mỗi số dương ε nhỏ bao nhiêu cũng được, có một số nguyên N (phụ thuộc vào ε) sao cho bất đẳng thức $|a_n - a| < \varepsilon$ đúng với mọi n thỏa mãn bất đẳng thức $n \geqslant N$.

Trong trường hợp hàm f(x) của biến liên tục x khi x dần tới một giá trị hữu hạn x_1 nào đó, ta thay thế từ « n đủ lớn » (đặc trưng bởi số N) bằng từ « đủ gần x_1 » (đặc trưng bởi số δ) và đi đến định nghĩa giới hạn trong xấp xỉ liên tục sau đây, do Kôsi phát biểu lần đầu tiên vào khoảng năm 1820: Hàm f(x) có giới hạn a khi x dần tới giá trị x_1 nếu với mỗi số dương (nhỏ tùy ý) ε

tìm được một số dương δ (phụ thuộc vào ε) sao cho $/ f(x) - a / < \varepsilon$ với mọi $x \neq x_1$ thỏa mãn bất đẳng thức $/ x - x_1 / < \delta$

Nếu xảy ra như thế, ta viết: $f(x) \to a$ khi $x \to x_1$.

Trong trường hợp $f(x) = \dfrac{x + x^3}{x}$ ta đã chứng minh rằng hàm $f(x)$ có giới hạn 1 khi x dần đến $x_1 = 0$. Ở đây chỉ cần chọn $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ là đủ.

2. Những chú ý về khái niệm giới hạn. Định nghĩa ε, δ của giới hạn là kết quả của những cố gắng và mò mẫm hàng thế kỷ, nó tiếp thu kết quả của những nỗ lực không biết mệt mỏi nhằm đặt cho khái niệm giới hạn một cơ sở toán học lành mạnh. Đối với những khái niệm quan trọng nhất của giải tích — đạo hàm và tích phân — không thể có cách định nghĩa nào khác ngoài việc chuyển qua giới hạn. Nhưng trong một thời gian dài thì việc thông hiểu rõ ràng và định nghĩa chặt chẽ bản thân khái niệm giới hạn đã là những khó khăn chưa vượt qua nổi.

Khi nghiên cứu các chuyển động nói riêng và những biến đổi tùy ý nói chung, các nhà toán học thế kỷ XVII và XVIII đã thừa nhận khái niệm đại lượng x biến đổi liên tục dần đến giá trị giới hạn x_1 là một cái gì khá trực quan và không cần phân tích sâu hơn nữa. Họ xét một đại lượng khác $u = f(x)$ phụ thuộc vào thời gian hoặc phụ thuộc vào một đại lượng x bất kỳ nào khác phụ thuộc vào thời gian. Còn lại một vấn đề: cần gán cho biểu tượng $f(x)$ «dần tới» một giá trị a xác định khi x di động đến x_1 một ý nghĩa toán học chính xác như thế nào?

Nhưng ngay từ thời Zênôn và các nghịch lý của ông, mọi cố gắng nhằm diễn đạt một cách toán học và chính

xác khái niệm trực giác vật lý hoặc siêu hình về một chuyển động liên tục, đều không có kết quả. Không có khó khăn trong việc theo dõi từng bước một dãy giá trị cụ thể a_1, a_2, a_3,... Nhưng khi cho biến liên tục x chạy trên toàn bộ một khoảng giá trị của trục số thì việc mô tả x « dần tới » một giá trị cho trước x_1 là khó vì không thể chỉ ra những giá trị thừa nhận được liên tiếp ở trong khoảng đó theo thứ tự tăng dần của chúng. Thực vậy, các điểm của đường thẳng là một tập hợp trù mật khắp nơi, không có những điểm « đi tiếp sau » điểm cho trước. Còn tồn tại sự sai khác không tránh khỏi giữa tư tưởng trực giác với ngôn ngữ toán học chính xác dùng để mô tả bằng các thuật ngữ khoa học và lôgic những vấn đề cơ bản của tư tưởng đó. Các nghịch lý của Zênôn đã phát hiện rất rõ sự không phù hợp đó.

Thành tựu quan trọng của Kôsi là ông đã nhận thức được rõ ràng rằng với mức độ của những khái niệm toán học thì phải từ bỏ mọi sự viện cớ vào biểu tượng trực giác về chuyển động liên tục. Khi đã từ bỏ ý đồ dựa vào những giải thích siêu hình và thừa nhận sự giải quyết bằng lập luận trên mảnh đất của các khái niệm toán học chặt chẽ, ta thường đạt được một tiến bộ khoa học chân chính phù hợp với những « sự kiện đã quan sát » trong vật lý học. Nếu ta phân tích một cách lôgic xem phải hiểu « sự xấp xỉ liên tục » là gì và có những phương pháp nào để thử lại từng trường hợp riêng biệt, ta sẽ phải thừa nhận định nghĩa mà Kôsi đã phát biểu, chứ không có cách nào khác. Định nghĩa đó là một định nghĩa tĩnh ; nó không dựa trên tư tưởng trực giác về chuyển động. Vả lại, chỉ một định nghĩa tĩnh như vậy mới cho phép giải thích toán học chính xác bản thân chuyển động liên tục và giải quyết những nghịch lý của Zênôn, ít nhất là những phần toán học của chúng.

Trong định nghĩa qua ε, δ thì biến độc lập không «chuyển động», nó không «hướng tới» và không dần tới «giới hạn» x_1 trong bất cứ một ý nghĩa vật lý nào. Thực ra, khi những thành ngữ đó cũng như ký hiệu ($\rightarrow$) còn được giữ lại, nhà toán học hoàn toàn không bắt buộc phải từ bỏ những quan niệm trực giác có ích liên kết với những từ và ký hiệu ấy. Nhưng, trong mọi trường hợp cụ thể, khi phải giải đáp vấn đề có hay không có giới hạn thì phải viện đến bản thân định nghĩa ε, δ. Câu hỏi về vấn đề định nghĩa đó phù hợp đến mức độ nào với quan niệm «động» trực giác về sự dần tới giới hạn cũng tương đương với câu hỏi: các tiên đề hình học mô tả cái mà ta gọi là không gian (với ý nghĩa trực giác) đến mức độ nào?

Trong chừng mực nào đó cả hai cách diễn đạt đều tạo khả năng làm việc bằng tưởng tượng, đồng thời tạo ra một cơ sở toán học thích hợp để xây dựng về lôgic sau này.

Cũng như giới hạn của dãy, chìa khóa để nhận thức đúng đắn định nghĩa Kôsi là việc lưu ý đến trật tự «tự nhiên» mà trong đó các biến được xem xét. Trước hết, ta để ý đến cận ε của biến phụ thuộc, sau đó cố gắng xác định cận thích hợp của biến độc lập. Khi ta nói «$f(x) \rightarrow a$ khi $x \rightarrow x_1$» thì ta chỉ lược bớt ý nói lên quá trình này có thể được thực hiện đối với số dương ε tùy ý.

Đặc biệt là không có một bộ phận nào trong khẳng định đó, chẳng hạn «$x \rightarrow x_1$» có ý nghĩa tự thân cả.

Còn phải nhấn mạnh điều sau đây. Khi buộc x «dần tới x_1» ta có thể cho phép x hoặc lớn hơn, hoặc nhỏ hơn x_1, nhưng do yêu cầu $x \rightarrow x_1$, khả năng bằng x_1 rõ ràng phải loại trừ; x dần tới x_1 nhưng không bao giờ x nhận giá trị x_1. Bởi vậy, có thể áp dụng định nghĩa của ta đối với các hàm số không xác định hoàn toàn

khi $x = x_1$, nhưng lại có một giới hạn nào đó khi x dần tới x_1. Việc loại trừ giá trị $x=x_1$ tương ứng với sự kiện là, khi xét dãy a_n khi $n \to \infty$ (thí dụ, giới hạn $a_n=1/n$), ta không bao giờ đặt trong công thức giá trị $n = \infty$.

Tuy nhiên, nói đến hàm $f(x)$ thì, khi x dần tới x_1, ta không cấm nó dần tới giới hạn a sao cho với những giá trị $x = x_1$ nào đó, đẳng thức $f(x) = a$ được thực hiện. Chẳng hạn, khi khảo sát hàm số $f(x) = x/x$ với x dần tới 0, ta không bao giờ cho phép x bằng 0, nhưng trái lại, đẳng thức $f(x) = 1$ đúng với mọi $x \neq 0$ và, giới hạn a tồn tại và bằng 1 là theo đúng định nghĩa.

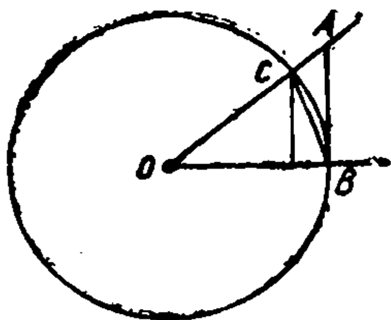
3. Giới hạn $\frac{\sin x}{x}$ Nếu biểu thị một góc đo bằng radian, thì biểu thức $\frac{\sin x}{x}$ được xác định với mọi giá trị x trừ giá trị $x = 0$, tại đấy nó có dạng $\frac{0}{0}$ không có nghĩa. Nhờ bảng hàm số lượng giác, bạn đọc có thể tính được giá trị của $\frac{\sin x}{x}$ đối với những giá trị nhỏ của x. Những bảng này thường cho góc với số đo bằng độ, ta nhớ lại (xem § 1, mục 2), số đo độ y liên hệ với số đo radian x bởi hệ thức $x = \frac{\pi}{180} y = 0{,}01745y$ (chính xác đến chữ số thập phân thứ năm). Từ bảng bốn chữ số ta tìm được các giá trị sau đây:

y	x	sin x	$\frac{\sin x}{x}$
10^0	0,1745	0,1736	0,9948
5^0	0,0873	0,0872	0,9988
2^0	0,0349	0,0349	1,0000
1^0	0,0175	0,0175	1,0000

Tuy rằng ở đây độ chính xác của các số chỉ giới hạn ở chữ số thứ tư, nhưng các kết quả trên gợi ý ta:

$$\frac{\sin x}{x} \to 1 \text{ khi } x \to 0 \quad (1)$$

Bây giờ ta trình bày chứng minh chặt chẽ cho hệ thức giới hạn này.



H. 169. Bất đẳng thức lượng giác cơ bản.

Theo định nghĩa (qua hình tròn đơn vị) của các hàm số lượng giác, ta có các hệ thức sau đây đối với đại lượng x là số đo radian của góc BOC (xem H. 169) với hạn chế $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Diện tích tam giác OBC=1/2.1.sinx.

Diện tích quạt tròn OBC $= \frac{1}{2}. \ x$

Diện tích tam giác OAB = 1/2 . 1.tgx.

Từ đó suy ra bất đẳng thức kép:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

chia cho sinx ta được

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

hoặc $$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad (2)$$

Nhưng mặt khác:

$$1 - \cos x = (1 - \cos x) . \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$$

$< \sin^2 x.$

Vì $\sin x < x$ cho nên từ đó suy ra:

$$1 - \cos x < x_1 \quad (3) \quad \text{hoặc} \quad 1 - x^2 < \cos x.$$

Phối hợp với bất đẳng thức (2), ta được bất đẳng thức :

$$1 - x^2 < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (4)$$

Ta giả thiết $0 < x < \frac{\pi}{2}$, song bất đẳng thức (4) còn đúng khi $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ vì $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ và $(-x)^2 = x^2$.

Hệ thức giới hạn (1) được suy ra ngay từ bất đẳng thức (4). Thực vậy, hiệu giữa $\sin x/x$ và 1 nhỏ hơn x^2, còn x^2 có thể trở thành nhỏ hơn số ε tùy ý nếu chọn $|x| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$.

4. Giới hạn khi $x \to \infty$ Nếu biến liên tục x đủ lớn thì hàm $f(x) = 1/x$ trở nên nhỏ tùy ý hoặc « dần tới 0 ». Thực vậy, sự biến thiên của hàm đó khi x tăng, về thực chất chính là sự biến thiên của dãy $1/n$ khi n tăng. Ta đưa ra định nghĩa tổng quát: *Hàm $f(x)$ có giới hạn a khi x dần tới vô hạn* và viết điều đó dưới dạng:

$$f(x) \to a \text{ khi } x \to \infty$$

nếu với một số ε dương tùy ý nhỏ, có thể chọn một số dương K (phụ thuộc vào ε) sao cho bất đẳng thức:

$$|f(x) - a| < \varepsilon$$

được thực hiện với điều kiện $|x| > K$.

Đối với hàm $f(x) = 1/x$ thì $a = 0$ vì chỉ cần chọn $K = \frac{1}{\varepsilon}$. Bạn đọc có thể giải thích được điều đó nhanh chóng.

§ 4. ĐỊNH NGHĨA CHÍNH XÁC TÍNH LIÊN TỤC

Ở § 1, mục 5 ta đã đưa ra định nghĩa sau đây về tính liên tục của hàm: hàm $f(x)$ là liên tục tại điểm

$x = x_1$ nếu khi x dần tới x_1, đại lượng $f(x)$ dần tới giới hạn bằng $f(x_1)$. Nếu phân tích cách diễn đạt này ta thấy có ngụ ý thực hiện hai yêu cầu sau đây:

a) tồn tại giới hạn a của hàm $f(x)$ khi biến x tiến dần tới giới hạn x_1.

b) giới hạn a đó phải bằng $f(x_1)$.

Nếu trong định nghĩa giới hạn ở §3 mục 1 ta thay a bởi giá trị $f(x_1)$ của nó thì điều kiện liên tục có dạng sau: hàm $f(x)$ là liên tục khi $x = x_1$, nếu với một số ε dương nhỏ tùy ý có thể chọn một số dương δ (phụ thuộc vào ε) sao cho bất đẳng thức:

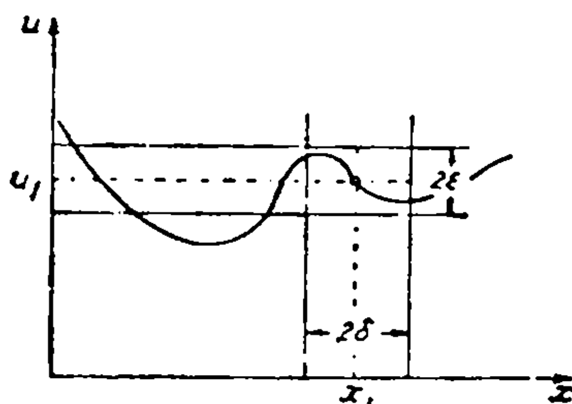
$$|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$$

là đúng với mọi x thỏa mãn điều kiện $|x - x_1| < \delta$ (ở đây, hạn chế $x \neq x_1$ được đưa vào trong định nghĩa giới hạn là thừa vì bất đẳng thức $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$ được thỏa mãn khi $x = x_1$).

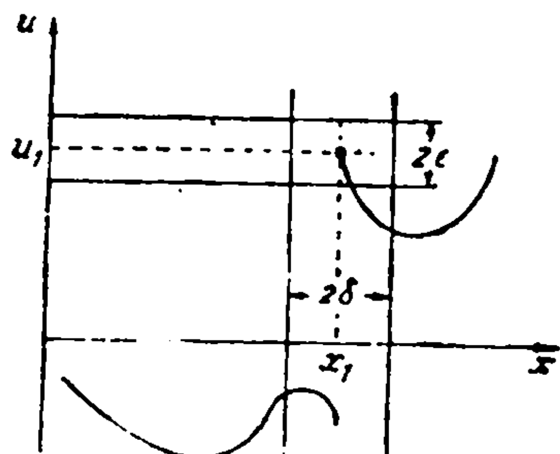
Để làm thí dụ, ta sẽ xác nhận tính liên tục của hàm $f(x) = x^3$ tại điểm $x_1 = 0$ chẳng hạn. Ta có $f(x_1) = 0^3 = 0$. Chọn một số ε dương nhỏ, chẳng hạn $\varepsilon = 1/1000$. Ta cần chứng minh rằng nếu giới hạn ở các giá trị của x dần tới 0, ta sẽ được những giá trị tương ứng của hàm $f(x)$ khác 0 một lượng nhỏ hơn $1/1000$, tức là bao hàm giữa $-1/1000$ và $+1/1000$. Ta thấy ngay rằng giá trị $f(x)$ không vượt ra khỏi các cận đó nếu ta hạn chế sự biến thiên của x ở các giá trị khác 0 một lượng nhỏ hơn $\delta = \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{1}{10}$. Thực vậy, nếu $|x| < \frac{1}{10}$ thì $|f(x)| = |x^3| < 1/1000$. Hoàn toàn tương tự, ta có thể chọn một giá trị bất kỳ $\varepsilon = 10^{-4}$, 10^{-5} hoặc v.v... thay cho $\varepsilon = \frac{1}{1000}$; số $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$ sẽ thỏa mãn yêu cầu vì từ bất đẳng thức $|x| < \sqrt[3]{\varepsilon}$ suy ra được bất đẳng thức $|f(x)| = |x^3| < \varepsilon$.

Dựa vào định nghĩa tính liên tục nhờ ε, δ có thể chứng minh mọi đa thức, mọi hàm hữu tỉ và hàm lượng giác đều liên tục ở một điểm bất kỳ trừ những giá trị cô lập x mà lân cận những giá trị đó hàm trở nên vô hạn.

Nếu liên hệ định nghĩa liên tục với đồ thị của hàm $u = f(x)$ ta có thể cho định nghĩa đó một dạng thức hình học như sau. Chọn một số $\varepsilon > o$ nào đó và vẽ những đường thẳng song song với trục x ở độ cao $f(x_1) - \varepsilon$ và $f(x_1) + \varepsilon$ so với trục x. Bây giờ cần tìm một số dương δ sao cho mọi phần của đồ thị nằm bên trong một dải thẳng đứng có chiều rộng 2δ lân cận x_1 cũng được chứa bên trong một dải nằm ngang rộng 2ε lân cận $f(x_1)$. Hình 170 chỉ ra một hàm số liên tục tại điểm x_1, hình 171 chỉ ra một hàm số có gián đoạn tại



H. 170. Hàm liên tục tại điểm $x = x_1$



H. 171. Hàm có gián đoạn tại điểm $x = x_1$

điểm đó. Trong trường hợp thứ hai thì một dải thẳng đứng lân cận x_1 có hẹp đến đâu, cũng chứa phần của đồ thị nằm ở ngoài dải nằm ngang có chiều rộng 2ε.

Nếu tôi khẳng định một hàm $u = f(x)$ cho trước là liên tục tại điểm $x = x_1$ thì điều này có nghĩa là tôi đã cam kết với các bạn như sau

Các bạn chọn một số dương ε tùy ý, nhỏ bao nhiêu cũng được. Tôi sẽ phải tìm một số dương δ sao cho bất đẳng thức

$|x-x_1| < \delta$ kéo theo bất đẳng thức $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$. Nhưng, tôi không cần phải tìm một số δ thích hợp với mọi ε mà các bạn sẽ nêu ra tiếp sau đó; việc chọn δ của tôi phụ thuộc vào việc chọn ε của các bạn. Nếu các bạn chọn được dù chỉ một ε mà tôi không tìm được cho nó một δ thích hợp thì tôi sẽ thua cuộc — điều khẳng định của tôi bị bác bỏ. Để chứng tỏ rằng tôi có thể thực hiện được điều cam kết của mình trong trường hợp một hàm số cụ thể $u = f(x)$, tôi phải lập được một cách tường minh một hàm dương $\delta = \varphi(\varepsilon)$ xác định với mọi số dương ε. Đối với hàm này tôi có thể chứng minh rằng từ bất đẳng thức $|x-x_1| < \delta$ suy ra bất đẳng thức $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$. Đối với hàm $u = f(x) = x^3$ tại $x = 0$ thì hàm $\delta = \varphi(\varepsilon)$ là $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$.

Bây giờ thì ta đã thấy rõ rằng định nghĩa tính liên tục nhờ ε, δ không mâu thuẫn với những điều mà ta gọi là « các sự kiện đã quan sát được » của hàm số. Như vậy, nó sẽ phù hợp với một nguyên tắc của khoa học hiện đại đề cập đến tiêu chuẩn hữu ích của một khái niệm nào đó hoặc của « sự tồn tại » một hiện tượng nào đó là khả năng trực tiếp quan sát nó (với ý nghĩa khoa học) hoặc qui nó thành những sự kiện quan sát được.

§ 5. HAI ĐỊNH LÝ CƠ BẢN VỀ HÀM LIÊN TỤC

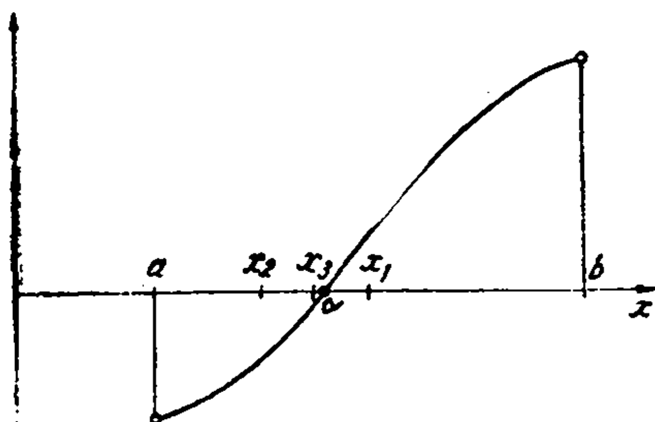
1. Định lý Bôlxanô Berna Bôlxanô (1781 — 1848), một linh mục thiên chúa giáo, một người am hiểu về triết học kinh viện, đã là một trong những người đầu tiên đưa vào giải tích toán học khái niệm hiện đại về sự chặt chẽ. Cuốn sách nhỏ nổi tiếng của ông « Paradoxien des Unendichen » đã được xuất bản năm 1850. Ở đây, lần đầu tiên đã thừa nhận rằng nhiều khẳng định có vẻ hiển nhiên có liên quan đến hàm số liên tục

---

* *Tiếng Đức*: « Những nghịch lý về cái vô hạn »(ND).

có thể và phải được chứng minh nếu muốn áp dụng chúng một cách tổng quát. Có thể lấy định lý về hàm một biến sau đây làm thí dụ:

Một hàm liên tục biến x, dương tại một giá trị x nào đó và âm tại một giá trị x khác trong một khoảng liên tục và đóng $a \leqslant x \leqslant b$ phải triệt tiêu tại một giá trị trung gian x nào đó. Như vậy, nếu hàm f(x) liên tục khi x biến thiên từ a đến b mà $f(a) < 0$ và $f(b) > 0$ thì có một giá trị α của biến x sao cho $a < \alpha < b$ và $f(\alpha) = 0$.



H. 172. Định lý Bôlxanô

Định lý Bôlxanô phù hợp rất tốt với quan niệm trực giác của chúng ta về một đường cong liên tục tất phải cắt trục x tại một điểm nào đó nếu đi từ phía này sang phía kia của trục x. Trái lại, điều này là không bắt buộc đối với hàm gián đoạn trên H. 157.

* **2. Chứng minh định lý Bôlxanô** Ta sẽ cho một chứng minh chặt chẽ của định lý này. Theo Gaux và các nhà toán học lớn khác thì có thể thừa nhận sự kiện này mà không cần chứng minh. Mục đích của ta là qui định lý Bôlxanô về các tính chất cơ bản của hệ thống số thực, đặc biệt về tiên đề Đêđêkin—Kantor về các đoạn thắt. Muốn vậy, ta xét đoạn I ($a \leqslant x \leqslant b$) trên đó có cho trước hàm f (x) và chia đoạn I làm đôi bởi điểm trung bình $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$. Nếu tại điểm trung bình đó ta có $f(x_1) = 0$ thì chứng minh là xong. Nếu $f(x_1) \neq 0$ thì $f(x_1)$ hoặc lớn hơn hoặc nhỏ hơn 0. Trong cả hai trường hợp thì một trong hai nửa của đoạn I sẽ có tính chất là dấu của các giá trị của hàm f(x) ở hai đầu của nó khác nhau.

Ta ký hiệu đoạn đó là I_1. Ta lập lại quá trình này, chia đoạn I_1 làm đôi, như vậy ở trung điểm của I_1 thì hoặc $f(x) = 0$ hoặc có thể chọn một nửa I_2 của đoạn I_1 mà đối với I_2 thì dấu các giá trị hàm ở hai đầu khác nhau. Lặp lại qui trình này, rút cục hoặc ta có một dãy các đoạn thắt $I_1, I_2, I_3...$ hoặc thu được sau một bước một điểm tại đó $f(x) = 0$. Trong trường hợp thứ nhất thì tiên đề Đeđêkin — Kantor sẽ bảo đảm tồn tại trong đoạn ban đầu I một điểm α nào đó thuộc vào mọi đoạn. Ta sẽ chứng minh $f(\alpha) = 0$, tức α sẽ là một điểm mà ta cần chứng minh sự tồn tại của nó.

Cho đến đây, giả thiết về tính liên tục của hàm f(x) còn chưa được dùng tới. Bây giờ ta sẽ dựa vào giả thiết đó để kết thúc chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Ta sẽ chứng minh $f(\alpha) = 0$ bằng cách giải thiết điều ngược lại và đi đến mâu thuẫn. Giả sử $f(\alpha) \neq 0$, chẳng hạn $f(\alpha) = 2\varepsilon > 0$. Vì hàm f(x) liên tục cho nên ta tìm được một đoạn J (có thể là nhỏ) dài 2δ có tâm ở điểm α sao cho giá trị của hàm f(x) trong toàn đoạn khác $f(\alpha)$ ít hơn ε. Sau đó, vì $f(\alpha) = 2\varepsilon$ cho nên có thể chắc chắn $f(x) > \varepsilon$ tại mỗi điểm của J, tức là $f(x) > 0$ trong đoạn J. Nhưng đoạn J là xác định, nếu n đủ lớn thì đoạn nhỏ I_n phải rơi vào trong J vì dãy các độ dài I_n dần tới 0. Ở đây có mâu thuẫn. Thực vậy, do cách chọn đoạn I_n suy ra hàm f(x) có dấu khác nhau ở hai điểm mút của mỗi đoạn I_n, tức là hàm f(x) nhận các giá trị âm ở đâu đó trên đoạn J. Do đó giả thiết $f(\alpha) > 0$ là sai; hoàn toàn tương tự $f(\alpha) < 0$ cũng sai. Vậy $f(\alpha) = 0$.

3. Định lý Vaierstrax về cực trị Một sự kiện quan trọng và rất rõ ràng về mặt trực giác có liên quan đến hàm số liên tục đã được Karl. Vaierstrax (1815 — 1897) đề cập đến. Có thể nói ông là một người có trách nhiệm hơn ai hết trong việc đấu tranh cho xu hướng chặt chẽ hiện đại trong giải tích toán học. Định lý này khẳng định: *Nếu một hàm f (x) liên tục trong đoạn I ($a \leqslant x \leqslant b$) kể cả những điểm mút của khoảng a và b thì trong đoạn I phải tồn tại ít nhất một điểm, tại đó hàm f (x) đạt giá trị lớn nhất M của nó, và một điểm khác tại đó hàm f(x) đạt giá trị m nhỏ nhất của nó.* Nói

một cách trực quan, điều này có nghĩa là đồ thị của hàm liên tục $u = f(x)$ phải có ít nhất một điểm cao nhất và một điểm thấp nhất.

Cần đặc biệt nhấn mạnh rằng khẳng định này có thể là không đúng nếu hàm f (x) không liên tục ở một số hữu hạn điểm của đoạn I. Chẳng hạn, hàm $f(x) = 1/x$ không có giá trị lớn nhất trong khoảng $0 < x \leqslant 1$ dẫu rằng nó liên tục trong khoảng đó. Đồng thời, một hàm gián đoạn không bắt buộc phải đạt tới giá trị lớn nhất và nhỏ nhất, thậm chí cả khi nó giới nội. Chẳng hạn, ta xét hàm «cực kỳ» gián đoạn f(x) xác định như sau:

$$f(x) = x \text{ khi } x \text{ vô tỉ}$$
$$f(x) = 1/2 \text{ khi } x \text{ hữu tỉ.}$$

trong đoạn $0 \leqslant x \leqslant 1$. Mọi giá trị mà hàm số đó nhận đều bao hàm giữa 0 và 1. Trong những giá trị đó có những giá trị tùy ý gần 0 và 1 bao nhiêu cũng được: ta thu được những điểm này nếu chọn x vô tỉ và đủ gần 0 hoặc 1. Nhưng f(x) không bao giờ có thể bằng 0 cũng như bằng 1 vì đối với những x hữu tỉ ta có $f(x) = 1/2$ còn đối với những x vô tỉ ta có $f(x) = x$. Như vậy hàm không đạt tới giá trị 0 và 1 ở điểm nào cả.

* Định lý Vaierstrax được chứng minh gần giống như cách chứng minh định lý Bôlxanô. Chia đoạn I thành hai nửa khoảng đóng I' và I'' và chú ý đến I' như một khoảng trên đó phải tìm giá trị lớn nhất của f(x) nếu trong khoảng I'' không tìm được một điểm α sao cho $f(\alpha)$ lớn hơn mọi giá trị của hàm f(x) trong khoảng I'; trong trường hợp này ta sẽ chọn khoảng I'. Khoảng mà ta đã chọn được ký hiệu là I_1. Bây giờ ta lại tiến hành với I_1 như đã tiến hành với đoạn I, và được đoạn I_2 v.v... Quá trình này sẽ xác định một dãy $I_1, I_2, \ldots I_n \ldots$ những đoạn lồng nhau mà tất cả đều chứa một điểm z nào đó. Ta sẽ chứng minh giá trị $f(z) = M$ của hàm tại điểm đó là giá trị lớn nhất trong tất cả giá trị mà hàm f(x) đạt tới trong đoạn ban đầu; tức là, không thể có,

điểm s mà $f(s) > M$. Giả thử tìm được điểm s như vậy thỏa mãn điều kiện $f(s) = M + 2\varepsilon$ trong đó ε là một số dương (có thể rất nhỏ) nào đó. Do tính liên tục của hàm f(x) ta có thể bao điểm z bằng một khoảng nhỏ K không chứa điểm s sao cho trong khoảng K, các giá trị của hàm f(x) sai khác $f(z) = M$ ít hơn ε tức là trong khoảng K tất phải có $f(x) < M+\varepsilon$. Nhưng với n đủ lớn thì khoảng I_n sẽ nằm trong khoảng K, đồng thời khoảng I_n đã được xác định sao cho không có một giá trị f(x) nào tại x nằm ngoài khoảng I_n có thể vượt quá giá trị của hàm f(x) tại những điểm x trong khoảng đó.

Nhưng điểm s nằm ngoài khoảng I_n và $f(s) > M + \varepsilon$; trong khi đó thì trong khoảng K, cũng chính là trong khoảng I_n ta có $f(x) < M + \varepsilon$. Ta đi đến mâu huẫn.

Sự tồn tại ít nhất một giá trị nhỏ nhất m cũng có thể chứng minh được theo phương pháp này. Vả lại nó là hệ quả của cái trước bởi vì giá trị nhỏ nhất của hàm f(x) là giá trị lớn nhất của hàm $g(x) = -f(x)$.

Định lý Vaierstrax đối với hàm liên tục hai hoặc nhiều biến số x, y,... cũng được chứng minh tương tự. Trong trường hợp này thay các khoảng đóng (kể cả các điểm mút) ta sẽ chọn các miền đóng, chẳng hạn như hình chữ nhật trong mặt phẳng x, y (kể cả chu tuyến).

Chứng minh của các định lý Bôlxanô và Vaierstrax có tính chất không kiến thiết rõ ràng. Chúng không đề xuất được phương pháp để tìm « có kết quả » vị trí của điểm không hoặc giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm với độ chính xác định trước, sau một số hữu hạn thao tác. Chỉ chứng minh được bản thân sự tồn tại hoặc nói đúng hơn sự vô lý của sự không tồn tại những giá trị đã nêu. Tình hình này chính là một điểm quan trọng mà những « người trực giác chủ nghĩa » đã không tán thành. Một số trong bọn họ, thậm chí còn muốn loại trừ những định lý tương tự kiểu này ra ngoài toán học. Tuy vậy, người nghiên cứu toán học không nên tiếp thu những ý kiến phản đối ấy một cách nghiêm túc hơn cái mà đa số các nhà phê bình đã làm.

*** 4 Định lý về dãy — Tập hợp compac.** Giả thử x_1, x_2, x_3... là một dãy số vô hạn nào đó gồm các số khác nhau hoặc không khác nhau nằm trong đoạn I:

Dãy đó có thể dần tới hoặc không dần tới giới hạn. Dù thế nào chăng nữa, *bao giờ cũng có thể trích ra từ một dãy như thế, bằng cách bỏ đi một số số hạng của nó, một dãy vô hạn mới* y_1, y_2, y_3... *dần tới giới hạn ở trong đoạn I.*

Muốn chứng minh định lý này, ta chia đoạn I thành hai đoạn I' và I'' bởi điểm giữa $x = \frac{a+b}{2}$:

$$I': \quad a \leqslant x \leqslant \frac{a+b}{2}; \qquad I'': \frac{a+b}{2} \leqslant x \leqslant b.$$

ít nhất một trong hai đoạn ấy sẽ có vô số số hạng x_n của dãy cơ bản: ta biểu thị nó là I_1. Ta chọn một trong những số hạng đó (x_{n_1}) và biểu thị nó là y_1. Ta cũng làm như vậy với đoạn I_1. Vì trên đoạn I_1 có tập hợp vô hạn các số hạng x_n cho nên ít nhất chúng phải có mặt vô số tại một trong hai nửa của I_1. Ta biểu thị nửa đó là I_2. Trên đoạn I_2 ta lấy một số hạng x_n ($n > n_1$) và biểu thị nó là y_2. Tiếp tục như vậy, ta được một dãy các đoạn lồng nhau $I_1, I_2, I_3, \ldots$ và dãy $y_1, y_2, y_3 \ldots$ các số hạng của dãy cơ bản sao cho y_n nằm trên đoạn I_n dù n như thế nào. Dãy các đoạn này thắt lại đến một điểm y của khoảng và rõ ràng dãy y_1, y_2, y_3 ... có giới hạn y. Đó là điều phải chứng minh.

* Những lập luận này cho phép khái quát hóa một loại đặc trưng cho toán học hiện đại. Ta xét một biến X chạy trên một tập hợp S nào đó, trong đó có xác định khái niệm «khoảng cách». S có thể là một tập hợp điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian. Nhưng đó chưa phải là điều cần thiết. Chẳng hạn, cũng có thể S là một tập hợp tất cả các

tam giác trên mặt phẳng. Nếu X và Y là hai tam giác có các đỉnh tương ứng A,B,C và A', B',C' thì « khoảng cách » giữa hai tam giác, có thể là số:

$$d(X,Y) = AA' + BB' + CC',$$

trong đó AA' biểu thị khoảng cách thông thường giữa các điểm A và A' v.v.... Khi khái niệm « Khoảng cách » đã được đưa vào trong tập hợp thì ta có thể định nghĩa khái niệm dãy các phần tử x_1, x_2, x_3 ... dẫn tới giới hạn x cũng là một phần tử của tập hợp S. Ta hiểu điều đó là $d(X, X_n) \to 0$ khi $n \to \infty$. Bây giờ, ta nói rằng tập hợp S là *compăc, nếu từ mỗi dãy X_1, X_2, X_3 ... các phần tử của tập hợp đó có thể trích ra một dãy con dẫn tới một giới hạn X nào đó thuộc vào tập hợp S.* Trong mục trước ta đã chứng minh rằng một đoạn đóng kín $a \leqslant x \leqslant b$ là compăc theo nghĩa đã nêu. Bởi thế, khái niệm tập hợp compăc có thể coi là sự khái quát hóa khái niệm *đoạn đóng kín* trên trục số. Ta lưu ý rằng *toàn bộ* trục số là không compăc vì dãy các số nguyên 1,2,3,4,5 ... không dẫn tới một giới hạn nào và không chứa trong nó một dãy con nào dẫn tới giới hạn cả. Cũng vậy, một khoảng mở là không compăc, chẳng hạn khoảng $o < x < 1$ (không bao gồm những điểm mút). Thực vậy, dãy 1/2, 1/3, 2/4 ... hoặc một dãy con bất kỳ của nó dẫn tới giới hạn O nhưng giới hạn này lại không thuộc khoảng mở đang xét. Cũng như vậy, có thể chứng minh rằng một miền của mặt phẳng gồm những điểm trong của một hình vuông hoặc hình chữ nhật nào đó chẳng hạn, là không compăc, nhưng nó sẽ trở nên compăc sau khi ghép thêm các điểm của biên vào. Cũng dễ dàng chứng minh tập hợp tất cả tam giác có đỉnh nằm trong hoặc nằm trên đường tròn của một hình tròn cho trước là compăc. Có thể khái quát hóa khái niệm liên tục trong trường hợp biến X chạy trên một hợp tùy ý, nếu như trong tập hợp này khái niệm dẫn tới giới hạn được đưa vào. Ta nói hàm u (x), trong đó u là số thực là liên tục tại phần tử X nếu với mọi dãy các phần tử X_1, X_2, X_3 .... có giới hạn X thì dãy tương ứng $F(X_1)$, $F(X_2)$, $F(X_3)$ ... sẽ có giới hạn F(X) (có thể cho một định nghĩa nhờ ε, δ) . Cũng

để chứng minh rằng định lý Vaierstrax còn đúng cho trường hợp một hàm F(X) liên tục mở rộng cho trước trên một tập hợp compăc nào đó :

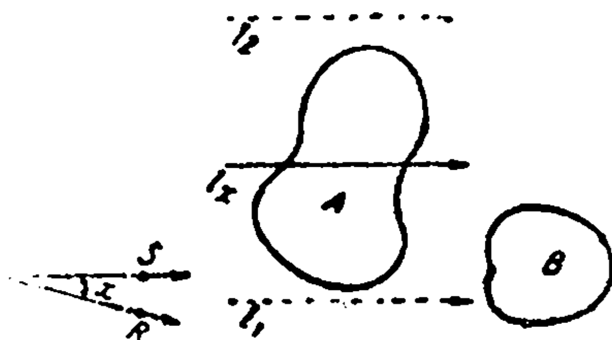
Nếu u = F(x) là một hàm liên tục xác định với mọi phần tử của một tập hợp compăc S thì phải có một phần tử X nào đó của S để cho F(X) đạt giá trị lớn nhất ở đó và có một phần tử khác để cho F(X) đạt giá trị nhỏ nhất ở đó.

Chứng minh là không có gì khó đối với người đã nắm được đặc điểm chung của tư tưởng chứng minh ở đây. Ta sẽ không đi xa hơn nữa theo hướng này. Trong chương VIII ta sẽ thấy rằng định lý Vaierstrax dưới dạng tổng quát có giá trị đặc biệt lớn trong lý thuyết các cực đại và cực tiểu.

§ 6. MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ BÔLXANÔ

1. Ứng dụng hình học Nhờ định lý Bôlxanô đơn giản và tổng quát, có thể chứng minh một số khẳng định mà thoạt nhìn thì hoàn toàn không hiển nhiên. Trước hết, ta chứng minh một khẳng định sau đây: *Nếu A và B là hai hình cho trước trên một mặt phẳng thì tồn tại một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng này chia đồng thời cả hai hình thành những phần tương đương (về diện tích).* «Hình» ở đây là mọi bộ phận của mặt phẳng giới hạn bởi một đường cong khép kín.

Ta bắt đầu chứng minh bằng việc lựa chọn một điểm cố định trong mặt phẳng và vẽ qua đó một tia cố định PR mà từ đó ta sẽ tính góc. Dù tia PS làm với tia PR một góc x như thế nào, cũng có một đường thẳng có hướng song song với PS và chia hình A thành những phần tương đương. Thực vậy, ta lấy một trong những đường thẳng có hướng song song với PS và ở một phía



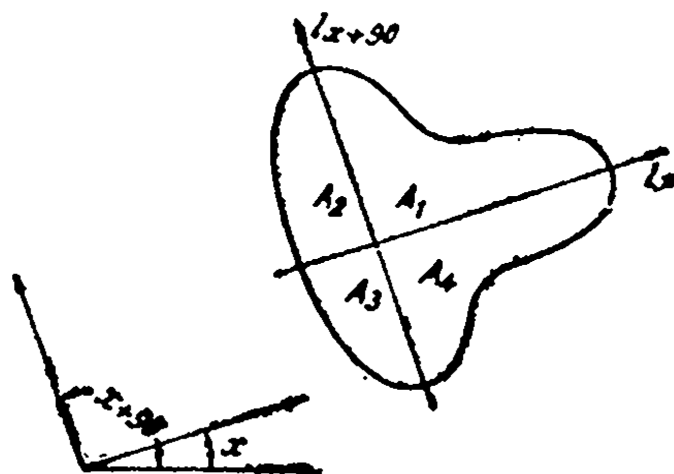
H. 173. Chia hai diện tích làm đôi cùng một lúc.

của hình A: giả sử đó là đường thẳng l_1. Ta tịnh tiến song song l_1 sao cho ở vị trí cuối cùng (ta gọi là l_2), hình A đã ở về phía khác (H.173). Trong trường hợp này, hàm là hiệu của diện tích phần hình A nằm bên phải đường thẳng có hướng và diện tích phần hình A nằm bên trái (« bên phải » — « phía đông », « bên trái » — « phía tây », nếu như đường thẳng được định hướng « lên phía bắc »). Chẳng hạn hàm có giá trị dương đối với vị trí của đường thẳng l_1 và có giá trị âm đối với vị trí của đường thẳng l_2. Vì hàm số này là liên tục, cho nên theo định lý Bôlxanô, nó sẽ triệt tiêu tại một vị trí trung gian nào đó của đường thẳng mà ta biểu thị là l_x và dĩ nhiên, lúc này hình A bị chia làm đôi. Như vậy dù x là bao nhiêu ($0^0 \leqslant x < 360^0$) vẫn có một đường thẳng l_x chia A làm đôi.

Bây giờ ta biểu thị $y = f(x)$ là hiệu giữa diện tích các phần của hình B bên phải l_x và diện tích phần của B bên trái l_x. Để xác định, ta giả thử đường thẳng l_0 song song với PR và chia A làm đôi sẽ có phần diện tích B ở bên phải lớn hơn bên trái, lúc đó y dương khi $x = 0^\circ$. Giả thử bây giờ x tăng đến 180^0, khi đó đường thẳng l_{180} song soug với PR và chia A làm đôi sẽ trùng với l_0 (nhưng theo hướng đối lại, phía « phải » và phía « trái » đổi chỗ cho nhau). Khi đó, rõ ràng các giá trị y khi $x = 180^0$ và khi $x = 0^\circ$ là hai số đối nhau. Vì y là hàm của x liên tục với $0^0 \leqslant x \leqslant 180^0$ (hiệu các diện tích đã nói, tất nhiên, sẽ biến thiên liên tục khi quay đường thẳng cắt), cho nên phải có một giá trị

$x = \alpha$ nào đó mà tại đó y triệt tiêu. Nhưng lúc đó đường thẳng l_α sẽ đồng thời chia đôi cả hai hình A và B. Định lý đã được chứng minh. Cần lưu ý rằng ta đã xác nhận được *sự tồn tại* của đường thẳng có tính chất đã cho nhưng không chỉ ra được một qui trình xác định để *dựng* nó: đấy là nét đặc trưng của những chứng minh toán học « thuần túy » về sự tồn tại.

Sau đây là một bài toán tương tự: Chia một hình A cho trước trên mặt phẳng làm bốn phần tương đương bằng *hai đường thẳng vuông góc*. Muốn chứng minh sự tồn tại của lời giải, ta quay trở lại lời giải bài toán trên ở giai đoạn đã đưa đường thẳng l_x vào nhưng hình B còn chưa được đưa vào trong lập luận. Ta xét đường thẳng l_{x+90} vuông góc với l_x và cũng chia A làm đôi. Nếu ta đánh số bốn phần của A như đã chỉ trên H. 174, thì dĩ nhiên ta có: $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$ và $A_2 + A_3 = A_1 + A_4$. Trừ đi, ta có: $A_1 - A_3 = A_3 - A_1$, tức là $A_1 = A_2$ và $A_3 = A_4$.



H. 174. Chia diện tích làm bốn phần bằng nhau.

Như vậy, sự tồn tại lời giải của bài toán sẽ được chứng minh nếu ta xác lập được sự tồn tại góc α sao cho đối với đường thẳng l_α thì đẳng thức $A_1(\alpha) = A_2(\alpha)$ giữa hai phần của hình được thỏa mãn vì từ đấy sẽ suy ra sự bằng nhau của cả bốn phần. Bây giờ, ta xét hàm $y = f(x)$

$$f(x) = A_1(x) - A_2(x)$$

trong đó $A_1(x)$ và $A_2(x)$ là các phần của hình, tương ứng với đường thẳng l_x. Giả thử, khi $x = 0°$ thì $f(0) = A_1(0) - A_2(0) > 0$. Như vậy, khi $x = 90°$ ta có:

$f(90) = A_1(90) - A_2(90) = A_2(0) - A_3(0) = A_2(0) - A_1(0) < 0.$
Nhưng vì $f(x)$ là hàm liên tục cho nên với một giá trị α nào đó ở giữa 0° và 90° ta có $f(\alpha) = A_1(\alpha) - A_2(\alpha) = 0$. Như vậy, các đường thẳng l_α và $l_{\alpha+90}$ sẽ chia hình thành bốn phần tương đương.

Những bài toán này đã được khái quát cho trường hợp ba hoặc nhiều hơn ba chiều. Trong trường hợp ba chiều thì bài toán thứ nhất được diễn đạt như sau: Cho ba vật thể không gian, tìm một mặt phẳng chia đồng thời mỗi vật thể ra làm đôi. Để chứng minh, cũng có thể dựa vào định lý Bôlxanô. Nếu số chiều lớn hơn thì một khẳng định tương tự cũng đúng nhưng cần áp dụng những phương pháp tinh vi hơn để chứng minh.

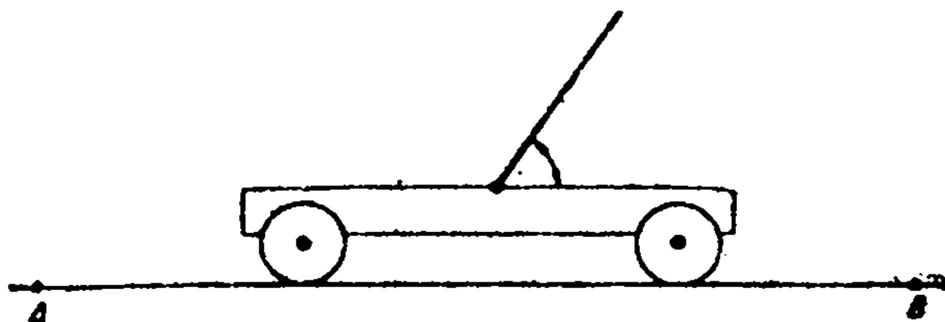
2. **Ứng dụng vào một bài toán cơ học.** Ta kết thúc chương này với việc xem xét một bài toán cơ học, mà thoạt nhìn có vẻ khó nhưng lại giải được rất đơn giản bằng các kiến thức có liên quan đến tính liên tục (Bài toán đã được G. Uytni đề ra). Ta giả thiết một xe lửa chạy trên một đoạn đường thẳng từ ga A đến ga B trong một khoảng thời gian hữu hạn nào đó. Hoàn toàn không giả thiết gì về chuyển động là đều hay chuyển động là có gia tốc không đổi. Trái lại, xe có thể chuyển động tùy ý: có tăng tốc, có chậm lại, không loại trừ trường hợp dừng lại trong chốc lát hoặc thậm chí có thể quay trở lại trên từng đoạn trước khi đi tới B. Nhưng dù chuyển động như thế nào, toàn bộ thời gian chuyển động cũng được coi là biết trước; nói cách khác thì một hàm $s = f(t)$ được coi là cho trước, trong đó s là khoảng cách từ xe lửa đến ga A, còn t là thời gian tính từ lúc khởi hành của xe. Một thanh rắn nặng được

bắt bản lề vào sàn một toa xe, thanh này có thể quay xung quanh một trục song song với trục của toa xe mà không có ma sát (ta giả thiết khi tiếp xúc với sàn xe thì thanh đó sẽ nằm lại trên sàn nếu nó không « nhảy lên » một lần nữa). Bài toán là như sau: *Khi xe bắt đầu chuyển động, liệu có thể đặt thanh rắn ở một vị trí ban đầu nào đó, tức là cho nó một góc nghiêng nào đó để cho, trên toàn bộ quãng đường, thanh rắn không rơi xuống sàn dưới tác dụng của chuyển động xe lửa và trọng lượng riêng của nó?* Thoạt tiên, có thể khó tin rằng, với một lược đồ chuyển động xác định trước của xe lửa như vậy thì lực tác dụng tương hỗ của trọng lực và phản lực lại có thể đảm bảo sự cân bằng cần thiết của thanh trong một điều kiện duy nhất — việc lựa chọn vị trí ban đầu thích hợp. Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng luôn luôn có một vị trí ban đầu như vậy.

May mắn là chứng minh không đòi hỏi kiến thức chính xác về các định luật động học (dựa vào các định luật đó để giải một bài toán là cực kỳ khó) Chỉ cần thừa nhận một giả thiết có nội dung vật lý: *chuyển động tiếp sau của thanh phụ thuộc liên tục vào vị trí ban đầu của nó*; đặc biệt, nếu ở vị trí ban đầu cho trước trong thời gian chuyển động, thanh rơi xuống sàn ở một phía thì, với mọi vị trí ban đầu sai khác với vị trí đã cho rất ít, thanh sẽ không rơi xuống sàn theo phía ngược lại.

Bây giờ ta lưu ý rằng, trong mọi thời điểm, vị trí của thanh được xác định bởi góc α mà nó làm với sàn xe. Các góc $\alpha = 0^0$ và $\alpha = 180^0$ ứng với hai vị trí nằm ngang đối nhau. Ký hiệu x là giá trị của góc α ở vị trí ban đầu của thanh. Chứng minh của ta sẽ là gián tiếp, phù hợp với tính chất tồn tại thuần túy của bài toán. Giả thử bao giờ thanh cũng sẽ rơi về phía này hoặc về phía kia của sàn xe, tức là α sẽ nhận giá trị 0^0 hoặc 180^0. Khi ta xác định một hàm f(x) với điều kiện

$f(x) = 1$ hoặc (-1) tùy theo thanh rắn rơi xuống phía tương ứng với $\alpha = 0^0$ hoặc $\alpha = 180^0$. Tính chất của



H. 175. Bài toán Uytni

hàm $f(x)$ là như sau: nó được cho trên đoạn $0^0 \leqslant x \leqslant$ $\leqslant 180^0$, liên tục trên đó và $f(0) = 1$, $f(180) = -1$. Theo định lý Bôlxanô, có một giá trị trung gian x nào đó $(0^0 < x < 180^0)$ để có đẳng thức $f(x) = 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết hàm $f(x)$ chỉ nhận các giá trị $+1$ và -1. Vậy giả thiết của ta bị bác bỏ.

Rất rõ ràng rằng, chứng minh đã nêu có tính chất thuần túy lý thuyết, bởi vì nó không cho được một chỉ dẫn nào để xác định vị trí ban đầu phải tìm của thanh rắn. Đồng thời, nếu như có thể tính toán chính xác tuyệt đối bằng lý thuyết vị trí đó thì do tính không bền vững, nó sẽ không có ích gì trong thực tiễn. Chẳng hạn, trong một trường hợp giới hạn, khi xe không chuyển động trong suốt « cuộc hành trình » thì lời giải tất nhiên là $x = 90^0$. Nhưng bất kỳ ai đã định cân bằng một chiếc kim ở vị trí thẳng đứng trên mặt nằm ngang trơn nhẵn thì đều hiểu lời giải đó là không thực hiện được trong thực tế. Nhưng về quan điểm toán học thì chứng minh đã nêu có một ý nghĩa rõ ràng.

*
* *

NHỮNG THÍ DỤ TIẾP THEO VỀ GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC

§ 1. CÁC THÍ DỤ VỀ GIỚI HẠN

1. Các chú ý tổng quát. Trong nhiều trường hợp, tính hội tụ của một dãy a_n có thể chứng minh theo lược đồ sau đây. Ta xét hai dãy khác b_n và c_n mà các số hạng của chúng nói chung, có cấu trúc đơn giản hơn và có tính chất:

$$b_n \leqslant a_n \leqslant c_n \qquad (1)$$

với mọi giá trị n. Khi đó, *nếu chứng tỏ rằng các dãy b_n và c_n có cùng một giới hạn α thì có thể khẳng định dãy a_n cũng có giới hạn α.* Đề nghị bạn đọc chứng minh định lý này.

Rõ ràng, việc áp dụng lược đồ đã nêu đòi hỏi phải làm toán với các bất đẳng thức.

1. Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$ (có thể thêm vào hai vế bất đẳng thức cùng một số).

2. Nếu $a > b$ và c dương thì $ac > bc$ (có thể nhân bất đẳng thức với một số dương).

3. Nếu $a > b$ thì $-b > -a$ (chiều của bất đẳng thức thay đổi khi nhân với -1). Chẳng hạn, nếu $2 < 3$ thì $-3 < -2$.

4. Nếu a và b cùng dấu thì từ bất đẳng thức $a < b$ suy ra $1/a > 1/b$.

5. $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

2. Giới hạn q^n. Nếu q là một số lớn hơn 1 thì các số hạng của dãy q^n sẽ tăng vô hạn. Thí dụ $q = 2$ thì q,

q^2, q^3... sẽ tăng vô hạn. Những dãy như thế « sẽ tiến tới vô hạn ». Tổng quát, chứng minh này dựa trên bất đẳng thức quan trọng:

$$(1 + h)^n \geqslant 1 + nh > nh \qquad (2$$

trong đó h là số dương tùy ý. Ta đặt $q = 1 + h$ trong đó $h > 0$; thế thì:

$$q^n = (1 + h)^n > nh$$

Giả thử k là một số dương lớn tùy ý, chỉ cần chọn $n > \frac{k}{h}$ để có bất đẳng thức

$$q^n > nh > k$$

nghĩa là $q^n \to \infty$. Nếu $q = 1$ thì mọi số hạng của dãy bằng 1 và giới hạn của dãy là 1. Nếu q âm thì dấu của q^n sẽ xen kẽ, và $q > 1$ thì không có giới hạn.

Ta đã xác nhận rằng nếu $-1 < q < 1$ thì $q^n \to 0$. Ở đây ta sẽ nêu một chứng minh khác rất đơn giản. Ta xét trường hợp $0 < q < 1$. Khi đó các số hạng của dãy q, q^2, q^3... đơn điệu giảm và dương. Do đó, dãy có giới hạn: $q^n \to a$. Nhân hai vế của hệ thức cuối cùng với q ta có: $q^{n+1} \to aq$. Nhưng q^{n+1} phải có cùng giới hạn với q^n vì nếu ta ký hiệu tăng chỉ số lên là n hay là $n + 1$ thì bản chất không thay đổi. Vậy $aq = a$ hoặc $a(q - 1) = 0$, Theo giả thiết $1 - q \neq 0$ ta suy ra $a = 0$

Nếu $q = 0$ thì khẳng định trên là tầm thường. Nếu $-1 < q < 0$ thì $0 < |q| < 1$, bởi thế theo điều vừa chứng minh thì $|q^n| = |q|^n \to 0$. Nhưng khi đó $q^n \to 0$ với điều kiện $|q| < 1$. Chứng minh đã kết thúc.

3. Giới hạn $\sqrt[n]{p}$ Dãy số $a_n = \sqrt[n]{p}$, tức là dãy số p, $\sqrt{p}$, $\sqrt[3]{p}$, $\sqrt[4]{p}$, ... có giới hạn 1 dù p là số dương như thế nào:

$$\sqrt[n]{p} \to 1 \text{ khi } n \to \infty \qquad (3)$$

(ký hiệu $\sqrt[n]{p}$ biểu thị căn dương bậc n. Nếu p âm, n chẵn thì không có căn số thực bậc n).

Ta sẽ chứng minh hệ thức (3). Trước hết, giả thiết rằng $p > 1$, như thế thì $\sqrt[n]{p} > 1$. Ta đặt:

$$\sqrt[n]{p} = 1 + h_n$$

trong đó h_n là một lượng dương phụ thuộc vào n. Từ bất đẳng thức (2) suy ra

$$p = (1 + h_n)^n > nh_n$$

Chia cho n ta được: $0 < h_n < \frac{p}{n}$

Vì hai dãy $b_n = 0$ và $c_n = p/n$ đều có giới hạn 0, cho nên theo lập luận đã nêu ở mục 1, h_n cũng có giới hạn 0 khi n tăng và khẳng định của ta đã được chứng minh với $p > 1$. Ở đây ta gặp một thí dụ rất điển hình, khi hệ thức giới hạn, trong trường hợp $h_n \to 0$ cho trước, được xác nhận bằng cách bao hàm h giữa hai cận mà giới hạn của các cận này được xác định đơn giản hơn.

Tiện thể, ta tìm được một đánh giá cho hiệu h_n giữa $\sqrt[n]{p}$ và 1: hiệu đó tất nhiên phải nhỏ hơn p/n.

Nếu $0 < p < 1$ thì $\sqrt[n]{p} < 1$; có thể đặt $\sqrt[n]{p} = \frac{1}{1+h_n}$

trong đó h_n là một số dương phụ thuộc vào n. Suy ra:

$$p = \frac{1}{(1+h_n)^n} < \frac{1}{nh_n},$$

tức là $$0 < h_n < \frac{1}{np},$$

hay h_n dần tới 0 khi $n \to \infty$. Thế thì tất nhiên $\sqrt[n]{p} \to 1$. Tác dụng « cân bằng » của phép khai căn bậc n là ở chỗ các kết quả của phép khai căn với bậc tăng liên tiếp một số dương cho trước dần tới đơn vị vẫn còn đúng trong trường hợp bản thân biểu thức dưới căn thay đổi. Bây giờ, ta sẽ thử lại rằng:

$$\sqrt[n]{n} \to 1 \quad \text{khi } n \to \infty$$

Một mẹo nhỏ sẽ giúp ta dựa vào bất đẳng thức (2) một lần nữa. Thay cho căn bậc n của n ta lấy căn bậc n của $\sqrt{n}$. Đặt $\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + k_n$, trong đó k_n là một lượng dương phụ thuộc vào n. Dựa vào bất đẳng thức (2) ta có:

$$\sqrt{n} = (1 + k_n)^n > nk_n \text{ hay,}$$

$$k_n < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{Vậy: } 1 < \sqrt[n]{n} = (1 + k_n)^2 = 1 + 2k_n + k_n^2 <$$

$$< 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

Vế phải của bất đẳng thức này dần tới 1 khi $n \to \infty$, do đó cũng có thể nói như vậy với $\sqrt[n]{n}$.

4. Các hàm gián đoạn được coi như giới hạn của các hàm liên tục. Ta sẽ xét những dãy a_n, trong đó các số hạng a_n không phải là hằng số mà là những hàm biến x, tức là $a_n = f_n(x)$. Nếu một dãy như vậy là hội tụ thì giới hạn của nó cũng là một hàm của x.

$$f(x) = \lim f_n(x).$$

Cách biểu diễn một hàm f(x) dưới dạng giới hạn của một hàm khác như thế thường tỏ ra có ích, bởi vì bằng cách đó thì các hàm « phức tạp hơn » sẽ được qui về những hàm « đơn giản hơn ».

Đặc biệt, điều này được thể hiện trong khi xem xét những công thức tường minh nào đó để xác định các hàm có gián đoạn. Chẳng hạn, xét dãy $f_n(x) = \frac{1}{1 + x^{2n}}$

Khi $/x/ = 1$ ta có $x^{2n} = 1$ và $f_n(x) = \frac{1}{2}$, tức là $f_n(x) \to \frac{1}{2}$.

Mặt khác khi $|x| < 1$ ta có $x^{2n} \to 0$ và $f_n(x) \to 1$; sau cùng, khi $|x| > 1$ ta có $x^{2n} \to \infty$, cho nên $f_n(x) \to 0$. Tóm lại:

$$f(x) = \lim \frac{1}{1 + x^{2n}} = \begin{cases} 1 \text{ khi } |x| < 1 \\ \frac{1}{2} \text{ khi } |x| = 1 \\ 0 \text{ khi } |x| > 1 \end{cases}$$

Ta thấy hàm gián đoạn $f(x)$ được biểu thị như là giới hạn của một dãy hàm hữu tỉ liên tục.

Một thí dụ tương tự đáng lưu ý được cho bởi dãy:

$$f_n(x) = x^2 + \frac{x^2}{1 + x^2} + \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1 + x^2)^n}.$$

Khi $x = 0$, mọi hàm $f_n(x)$ triệt tiêu, vì thế $f(0) = \lim f_n(0) = 0$. Khi $x \neq 0$, biểu thức $\frac{1}{1+x^2}$ dương và nhỏ hơn 1, lý thuyết cấp số nhân cho phép khẳng định rằng $f_n(x)$ hội tụ khi $n \to \infty$. Giới hạn, tức là tổng của cấp số nhân vô hạn, bằng $\frac{x^2}{1-q} = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$.

Như vậy, $f_n(x)$ dẫn tới hàm $f(x) = 1 + x^2$ khi $x \neq 0$ và tới $f(x) = 0$ khi $x = 0$. Hàm $f(x)$ có gián đoạn khử được tại điểm $x = 0$.

* 5. **Các giới hạn trong phép lặp.** Ta thường phải xét những dãy mà cấu trúc như sau: a_{n+1} được suy ra từ a_n bằng những phép toán như khi suy ra a_n từ a_{n-1}; theo qui trình đó ta tính được một số hạng tùy ý của dãy nếu biết số hạng đầu. Ta gọi nó là một qui trình « lặp ».

Có thể dùng dãy sau làm thí dụ:

1) $\sqrt{1+1}$, $\sqrt{1+\sqrt{2}}$, $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$, ...

Mỗi số hạng được suy ra từ số hạng trước bằng cách thêm vào một đơn vị rồi khai phương. Bởi thế, dãy được xác định bởi hệ thức:

$$a_1 = 1; \qquad a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$$

Ta tìm giới hạn của nó. Tất nhiên, khi $n > 1$ thì $a_n > 1$. Hơn nữa, dãy là đơn điệu tăng, vì :

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (1 + a_n) - (1 + a_{n-1}) = a_n - a_{n-1} .$$

Vì $a_n > a_{n-1}$ cho nên $a_{n+1} > a_n$; nhưng $a_2 - a_1 = \sqrt{2} - 1 > 0$ cho nên $a_{n+1} > a_n$ với mọi n (theo qui nạp). Ngoài ra ta lưu ý rằng dãy đang xét là bị chặn.

Thực vậy ;

$$a_{n+1} = \frac{1+a_n}{a_{n+1}} < \frac{1 + a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{a_{n+1}} < 2 .$$

Theo nguyên lý về các dãy đơn điệu ta suy ra sự tồn tại của giới hạn : $a_n \to a$ và $1 < a \leqslant 2$. Nhưng rõ ràng a là nghiệm dương của phương trình $x^2 = 1 + x$. Thực vậy, hệ thức $a_{n+1}^2 = 1 + a_n$ khi $n \to \infty$ cho ta $a^2 = 1 + a$. Giải phương trình này ta được $a = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Ngược lại, cũng dễ thấy có thể giải gần đúng phương trình bậc hai này với độ chính xác tùy ý bằng qui trình lặp.

Nhờ phép lặp ta còn có thể giải những phương trình đại số khác. Chẳng hạn ta viết phương trình bậc ba $x^3 - 3x + 1 = 0$ dưới dạng $x = \dfrac{1}{3 - x^2}$,

sau đó chọn một số tùy ý làm a_1, chẳng hạn $a_1 = 0$ ta sẽ tiếp tục xác định được dãy a_n theo công thức

$$a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n^2};$$

ở đây, ta được:

$$a_2 = \frac{1}{3} = 0,3333\ldots ; \qquad a_3 = \frac{9}{26} = 0,3461 \ldots ;$$

$$a_4 = \frac{676}{1947} = 0,3472 \ldots$$

Có thể chứng minh rằng dãy đó có giới hạn bằng nghiệm của phương trình bậc ba đã cho, tức là $a = 0.3473\ldots$ Những quá trình lặp loại này có ý nghĩa rất lớn trong toán học, bởi vì nhờ đó ta đã cho được đa số các

phép «chứng minh tồn tại» Chúng rất có ích trong những phương pháp giải gần đúng các bài toán khác nhau.

§2. THÍ DỤ VỀ TÍNH LIÊN TỤC

Muốn chứng minh một cách hình thức hóa tính liên tục của một hàm cho trước, phải kiểm tra lại theo định nghĩa nêu ở §4 chương VI. Có khi quá trình đó rất cồng kềnh, nhưng may mắn là ta có thể dựa vào điều sẽ chứng minh trong chương VIII, đó là: tính liên tuc suy ra được từ tính khả vi. Bởi vì tính khả vi sẽ được xác nhận một cách có hệ thống cho tất cả các hàm sơ cấp, cho nên chúng ta sẽ tự kiềm chế không nêu ở đây những chứng minh hay về tính liên tục của các hàm nhiều loại.

Tuy nhiên, để minh họa tiếp tục cho định nghĩa tổng quát, ta sẽ xét thêm một thí dụ nữa, đó là hàm

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Ta có quyền hạn chế sự biến thiên có thể được của x trong một khoảng đóng $|x| \leqslant M$, trong đó M lớn tùy ý. Sau khi viết:

$$f(x_1) - f(x) = \frac{1}{1+x_1^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2 - x_1^2}{(1+x^2)(1+x_1^2)} =$$

$$= (x - x_1)\frac{x+x_1}{(1+x^2)(1+x_1^2)},$$

ta thấy rằng với $|x| \leqslant M$ sẽ có $|x_1| \leqslant M$. Suy ra bất đẳng thức

$$|f(x_1) - f(x)| \leqslant |x - x_1| . |x + x_1| \leqslant |x - x_1| .2M$$

Tức là hiệu ở vế trái sẽ trở nên nhỏ hơn số dương cho trước với điều kiện: $|x_1 - x| < \delta = \frac{\varepsilon}{2M}$.

Phải nhấn mạnh rằng ta còn quá rộng rãi trong những sự đánh giá đó. Bạn đọc thấy được dễ dàng rằng, tại những giá trị lớn của x và x_1 có thể thỏa mãn được những giá trị khá lớn của δ.

MỤC LỤC

R. COURANT H. ROBBINS

TOÁN HỌC LÀ GÌ?

TẬP 2

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 Trần Hưng Đạo Hà Nội

Người dịch: HÀN LIÊN HẢI

Biên tập: ĐỖ ĐỨC ỨNG

Sửa bản in: ĐỖ ĐỨC ỨNG

Trình bày bìa: LẠI PHÚ ĐẠI

In 10.100 bản, khổ 13 × 19, in tại Nhà máy in Tiến Bộ – Hà Nội

Số XB15/85. Số in: 2051.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 6-1985.

Giá : 20,00 đ